АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

10·11

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

УЧЕБНИК ДЛЯ 10—11 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Под редакцией А. Н. КОЛМОГОРОВА

●

Утверждено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1990

ББК 22.14я72
А45

Авторы А. Н. КОЛМОГОРОВ, А. М. АБРАМОВ, Ю. П. ДУДНИЦЫН,
Б. М. ИВЛЕВ, С. И. ШВАРЦБУРД

Учебник удостоен премии на Всесоюзном конкурсе
учебников для средней общеобразовательной школы

Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10—11 кл. сред. шк./
А45 А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.;
Под ред. А. Н. Колмогорова.— М.: Просвещение, 1990.—
320 с.: ил.— ISBN 5-09-002691-2

А $\frac{4306020000-327}{103(03)-90}$ инф. письмо — 90 ББК 22.14я72+22.161я72

Учебное издание

Колмогоров Андрей Николаевич
Абрамов Александр Михайлович
Дудницын Юрий Павлович и др.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Учебник для 10—11 классов
средней школы

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младшие редакторы *О. В. Агапова, Е. А. Буюклян*
Художники *В. В. Костин, Б. Л. Николаев*
Художественный редактор *Ю. В. Пахомов*
Технический редактор *Л. М. Абрамова*
Корректор *Н. С. Соболева*

ИБ № 12623

Сдано в набор 21.06.89. Подписано к печати 29.12.89. Формат 60×90 1/16. Бум. типограф. № 1. Гарнит. литерат. Печать высокая. Усл. печ. л. 20+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 21,19. Уч.-изд. л. 18,05+0,42 форз. Тираж 2 996 000 экз. Заказ № 581. Цена 65 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ISBN 5-09-002691-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вы начинаете изучать новый предмет. Слово «алгебра» в его названии указывает на то, что с некоторой частью курса вы уже знакомы. Как и в предыдущие годы, значительное внимание будет уделено «буквенному исчислению» — преобразованиям выражений, составлению и решению уравнений, неравенств и их систем. Наряду с решением уже знакомых задач, связанных с многочленами, рациональными дробями, степенями и корнями, вам предстоит расширить область применения алгебры. Будут включены новые сведения из тригонометрии, сведения о логарифмах и т. д.

Принципиально новая часть курса посвящена изучению начал анализа. Математический анализ (или просто анализ) — ветвь математики, оформившаяся в XVIII столетии и включающая в себя две основные части: дифференциальное и интегральное исчисления. Анализ возник благодаря усилиям многих математиков (в первую очередь И. Ньютона и Г. Лейбница) и сыграл громадную роль в развитии естествознания — появился мощный, достаточно универсальный метод исследования функций, возникающих при решении разнообразных прикладных задач. Знакомство с начальными понятиями и методами анализа (производная, дифференцирование, первообразная, интеграл, метод поиска максимумов и минимумов функций) — одна из важных целей курса. Добавим, что анализ традиционно относят к высшей математике. Элементы анализа вошли в школьный курс сравнительно недавно.

Несколько замечаний о том, как пользоваться учебником. Оглавление и предметный указатель, помещенные в конце книги, помогут вам быстро найти нужный раздел, определение или теорему. Ответы и указания к упражнениям приведены в соответствующем разделе. Для знакомства с основными идеями решения предлагаемых задач приводится множество примеров решения, выделенных значками ○ и ●. Отметим также, что задачи, включенные в каждый пункт до горизонтальной черты, необходимо уметь решать для получения удовлетворительной оценки; эти задачи задают обязательный уровень подготовки. Задачи, следующие после черты, чуть сложнее.

Чтобы помочь вам при подготовке к контрольной работе, в конце каждой главы приведены вопросы и задачи на повторение основного материала. Ответы на эти вопросы и примеры решения таких задач можно найти в тексте соответствующих пунктов.

О происхождении изучаемых понятий, терминов и символов, о людях, создававших математический анализ, вы можете узнать,

прочитав разделы «Сведения из истории», завершающие каждую из четырех глав учебника.

Дополнительный материал теоретического характера содержится в некоторых пунктах учебника, он выделен значками ∇ и $\blacktriangle$.

По окончании школы вам предстоит сдавать выпускные экзамены. Как известно, теоретический материал за курс средней школы кратко изложен в книге «Математика. Справочные материалы». Практические упражнения для повторения курса помещены в заключительной главе «Задачи на повторение».

ОБОЗНАЧЕНИЯ, ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ В УЧЕБНОМ ПОСОБИИ

N	— множество всех натуральных чисел
Z	— множество всех целых чисел
Z_0	— множество всех неотрицательных целых чисел
Q	— множество всех рациональных чисел
R	— множество всех действительных чисел, числовая прямая
$[a; b]$	— замкнутый промежуток (отрезок) с концами a и b, $a<b$
$(a; b)$	— открытый промежуток (интервал) с концами a и b, $a<b$
$(a; b]$, $[a; b)$	— полуоткрытые промежутки с концами a и b, $a<b$
$(a; \infty)$, $[a; \infty)$, $(-\infty; b)$, $(-\infty; b]$	— бесконечные промежутки
$(-\infty; \infty)$	— бесконечный промежуток, числовая прямая
$\vec{a}$	— обозначение вектора
$(a-\delta; a+\delta)$	— δ-окрестность точки a
$[x]$	— целая часть числа x
$\{x\}$	— дробная часть числа x
$\lvert x\rvert$	— модуль (абсолютная величина) числа x
$f(x)$	— значение функции f в точке x
$D(f)$	— область определения функции f
$E(f)$	— область значений функции f
Δx	— приращение аргумента x
$\Delta f(x_0)$, Δf	— приращение функции f в точке x_0
$f'(x_0)$	— производная функции f в точке x_0
sin	— функция синус
cos	— функция косинус
tg	— функция тангенс
ctg	— функция котангенс
e	— число e, основание показательной функции, для которой $(e^x)'=e^x$
$\log_a$	— логарифм с основанием a
lg	— десятичный логарифм
ln	— натуральный логарифм (логарифм с основанием e)
$\max\limits_{[a; b]} f$	— наибольшее значение функции f на отрезке $[a; b]$
$\min\limits_{[a; b]} f$	— наименьшее значение функции f на отрезке $[a; b]$
$\int_a^b f(x)\,dx$	— интеграл функции f в пределах от a до b
$\arcsin a$	— арксинус числа a
$\arccos a$	— арккосинус числа a
$\operatorname{arctg} a$	— арктангенс числа a
$\operatorname{arcctg} a$	— арккотангенс числа a

Глава I

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

1. Синус, косинус, тангенс и котангенс (повторение)

1. Радианная мера. Вы уже знакомы с радианной мерой углов. Угол в 1 *радиан* — это такой центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности (рис. 1). Радианная и градусная меры связаны зависимостью $180° = \pi$ радиан; угол в $n°$ равен $\frac{\pi n}{180}$ радиан.

При радианном измерении углов упрощается ряд формул. Так, для окружности радиуса r длина l ее дуги в α радиан находится по формуле

$$l = \alpha r; \tag{1}$$

площадь S сектора круга радиуса r, дуга которого содержит α радиан, такова:

$$S = \frac{\alpha r^2}{2}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) проще аналогичных формул $l = \frac{\pi r n}{180}$ и $S = \frac{\pi r^2 n}{360}$ для вычисления длины дуги окружности и площади сектора, дуги которых (величиной $n°$) заданы в градусной мере. Наличие у радианной меры ряда преимуществ (см. также п. 17) привело к тому, что в тригонометрии предпочитают пользоваться радианной, а не градусной мерой.

Из курса алгебры вы знаете, как определяется поворот на угол в α радиан, где α — произвольное действительное число. Знакомы вам и определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса α (α — угол или число).

○ Пример 1. Найдем значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла $\frac{\pi}{3}$.

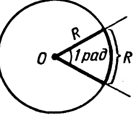


Рис. 1

В прямоугольном треугольнике с углом в 30° противолежащий ему катет равен половине гипотенузы c (рис. 2). Так как $c = 1$, находим

$$a = \frac{c}{2} = \frac{1}{2},\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



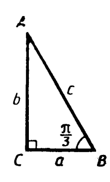


Рис. 2

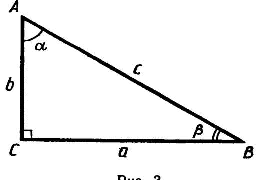


Рис. 3

Поэтому $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\frac{b}{a}=\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=$ $=\frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. ●

Вообще значения основных тригонометрических функций острого угла α могут быть найдены так, как это делалось в курсе геометрии (рис. 3): $\cos\alpha=\frac{b}{c}$, $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}$.

Приближенные значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла находятся с помощью калькулятора или таблиц. (Здесь и далее имеются в виду «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса.)

Задача нахождения значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла путем применения известных вам формул сводится к нахождению значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, где $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Так, например, может быть заполнена следующая таблица:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

2. Основные формулы тригонометрии. Из определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса сразу следуют *основные тригонометрические тождества:*

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1;$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha};\ \operatorname{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Основой для вывода остальных формул являются *формулы сложения*:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Из формул сложения, полагая $\beta=\frac{\pi n}{2}$, где $n\in\mathbf{Z}$, получаем *формулы приведения* для преобразования выражений вида

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),\ \cos\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),\ n\in\mathbf{Z}.$$

Для запоминания этих формул удобно пользоваться таким *мнемоническим правилом:*

а) *перед приведенной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция* (рис. 4), *если* $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

б) *функция меняется на «кофункцию», если n нечетно; функция не меняется, если n четно.* (Кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс и тангенс.)



Рис. 4

Например:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha;\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha;\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha \text{ и т. п.}$$

Вам известны также *формулы суммы и разности синусов (косинусов)*:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Из формул сложения, полагая $\alpha=\beta$, выводятся *формулы двойного аргумента:*

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha;\ \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Подставляя в формулы $\cos 2t=1-2\sin^2 t$ и $\cos 2t=2\cos^2 t-1$ значение $t=\frac{\alpha}{2}$, получаем *формулы половинного аргумента:*

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}; \qquad (3)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}. \qquad (4)$$

○ Пример 2. Найдем значение $\sin\frac{\pi}{12}$ без помощи таблиц по формуле (3):

$$\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Так как $0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{12}>0$, получаем $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Ответ можно упростить:

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \bullet$$

Разделив почленно равенство (3) на (4), получаем:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (5)$$

Умножая числитель и знаменатель правой части равенства $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ на $2\cos\frac{\alpha}{2}$, находим:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \text{ т. е.}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (6)$$

Аналогично, умножая числитель и знаменатель правой части равенства $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ на $2\sin\frac{\alpha}{2}$, приходим к формуле

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (7)$$

○ Пример 3. Найдем значение $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}$ без помощи таблиц.

$$\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{1+\cos\frac{5\pi}{4}}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}=(\sqrt{2}+1)^2.$$

Заметим, что $\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{8}<\pi$. Поэтому $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}<0$, и, следовательно, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}=-(\sqrt{2}+1)$.

Пример 4. Найдем $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\cos\alpha=0{,}8$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Угол $\frac{\alpha}{2}$ находится в первой четверти, и, значит, $\sin\frac{\alpha}{2}>0$, $\cos\frac{\alpha}{2}>0$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}>0$. Поэтому

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-0{,}8}{2}}=\sqrt{0{,}1}\approx 0{,}3162;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+0{,}8}{2}}=\sqrt{0{,}9}\approx 0{,}9487;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}}=\frac{1}{3}\approx 0{,}3333.$$ ●

Упражнения

В каждом пункте упражнения разделены на две части. Задачи, приводимые до горизонтальной черты, характеризуют обязательный уровень подготовки по данной теме: подобные упражнения необходимо уметь решать для получения удовлетворительной оценки. В большинстве случаев со способами решения этих задач можно ознакомиться, рассмотрев примеры, разобранные в тексте соответствующего пункта.

1. Выразите в радианной мере величины углов:

а) 45°, 36°, 180°; б) 120°, 310°, 360°;
в) 60°, 72°, 270°; г) 150°, 216°, 90°.

2. Выразите в градусной мере величины углов:

а) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{36}$; б) $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{9}$;

в) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{5}$, π; г) $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{12}$.

3. Найдите числовое значение выражения:

а) $\sin 0+\cos\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{4}$; б) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\pi+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}$;

в) $6\sin\frac{\pi}{6}-2\cos 0+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}$; г) $3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{6}$.

4. Существуют ли числа α, β и γ, для которых:

а) $\sin\alpha=-0{,}5$, $\cos\beta=\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\gamma=-2{,}5$;

б) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cos\beta=-2{,}2$, $\operatorname{tg}\gamma=0{,}31$;

в) $\sin\alpha=1{,}3$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{4}$, $\operatorname{tg}\gamma=5{,}2$;

г) $\sin\alpha=-\frac{7}{9}$, $\cos\beta=\sqrt{2{,}5}$, $\operatorname{tg}\gamma=-7{,}5$?

5. Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно:

а) $-\frac{7}{25}$ и $\frac{24}{25}$; б) 0,4 и 0,7; в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ и $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; г) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\frac{1}{\sqrt{5}}$?

6. Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно:

а) $-\frac{3}{5}$ и $-\frac{5}{3}$; б) $(\sqrt{3}-2)$ и $(\sqrt{3}+2)$;

в) 2,4 и $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{2\sqrt{5}}{5}$?

7. Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:

а) $\sin\alpha = -0{,}8,\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$,

в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; г) $\cos\alpha = \frac{15}{17},\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

8. Упростите выражение:

а) $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$; б) $\frac{1-2\cos^2\beta}{\cos\beta+\sin\beta}$;

в) $(\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$; г) $\frac{\sin^2 t - 1}{\cos^4 t} + \operatorname{tg}^2 t$.

9. Вычислите:

а) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15} - \sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}}{\cos 0{,}3\pi\sin 0{,}2\pi + \sin 0{,}3\pi\cos 0{,}2\pi}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{1+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}$,

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{10} + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}}$; г) $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{18}}{\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}}$.

10. Вычислите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$, если:

а) $\sin\alpha = \frac{4}{5},\ \cos\beta = -\frac{5}{13},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,\ \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$,

б) $\cos\alpha = 0{,}6,\ \sin\beta = -\frac{8}{17},\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi,\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

11. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - 2\sin\alpha\sin\beta}$; б) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \sqrt{2}\sin\alpha}$; г) $\operatorname{ctg}^2\alpha(1-\cos 2\alpha) + \cos^2\alpha$.

12. Преобразуйте данное выражение таким образом, чтобы аргумент соответствующей тригонометрической функции принадлежал промежутку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$:

а) $\sin\frac{7\pi}{8}$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$, $\operatorname{tg} 0{,}6\pi$, $\operatorname{ctg}(-1{,}2\pi)$;

б) $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$, $\sin\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$, $\cos 1{,}8\pi$, $\operatorname{ctg} 0{,}9\pi$.

13. Найдите числовое значение выражения:

а) $8\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$;

б) $\cos^2(\pi-\alpha)\,\text{tg}\,(\pi+\alpha)\,\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(2\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

в) $10\,\text{ctg}\,\frac{3\pi}{4}\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{4}$;

г) $\frac{\sin^2(\pi-t)}{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)}-\cos(2\pi-t)$.

14. Верно ли равенство:

а) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\frac{11\pi}{24}-\cos\frac{\pi}{8}=-\sin\frac{7\pi}{24}$;

в) $\sin\frac{11\pi}{18}+\sin\frac{7\pi}{18}=\cos\frac{2\pi}{9}$; г) $\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$?

15. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, если:

а) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; б) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

в) $\cos\alpha=\frac{24}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; г) $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

16. С помощью калькулятора или таблиц найдите значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\text{ctg}\,\alpha$, если:

а) $\alpha=0{,}19$; б) $\alpha=1{,}37$; в) $\alpha=0{,}9$; г) $\alpha=1{,}2$.

17. С помощью калькулятора или таблиц найдите:

а) радианные меры углов 17°; 43°24′; 83°36′; 72°12′;
б) градусные меры углов 0,384; 0,48; 1,11; 1,48.

---

18. Вычислите длину дуги, если известны ее радианная мера α и радиус R содержащей ее окружности:

а) $\alpha=2$, $R=1$ см; б) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $R=6$ см;

в) $\alpha=0{,}1$ и $R=1$ м; г) $\alpha=\frac{9\pi}{10}$, $R=10$ м.

19. Вычислите площадь сектора, если известны радиус R круга и радианная мера α центрального угла сектора:

а) $\alpha=2$, $R=1$ дм; б) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $R=2$ см;

в) $\alpha=0{,}1$, $R=1$ м; г) $\alpha=\frac{5\pi}{3}$, $R=3$ м.

20. а) Найдите радианную меру центрального угла сектора, если длина соответствующей дуги равна диаметру круга.
б) Длина дуги сектора втрое меньше его периметра. Найдите радианную меру его центрального угла.

Найдите значения выражений (21—22).

21. а) $3\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+2\cos(3\alpha-\pi)$, если $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

б) $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+3\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)$, если $\alpha=\frac{2\pi}{3}$;

в) $4\cos\left(3\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)$, если $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

г) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}^2\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, если $\alpha=-\frac{\pi}{6}$.

22. а) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$, если $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

б) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{4}$;

в) $\frac{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

г) $\sin^2\alpha-\cos^2\beta$, если $\cos^2\alpha-\sin^2\beta=0{,}5$.

23. Докажите, что при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ справедливо равенство:

а) $\sin\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^{-2}\alpha}}$;

б) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=2\operatorname{ctg}\alpha$;

в) $\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$;

г) $\sqrt{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha}}$.

Докажите тождества (24—26).

24. а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=2$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; г) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta$.

25. а) $(\sin^2 t+2\sin t\cos t-\cos^2 t)^2=1-\sin 4t$;

б) $\frac{\cos\alpha-2\sin 3\alpha-\cos 5\alpha}{\sin 5\alpha-2\cos 3\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha$;

в) $\frac{1-4\sin^2 t\cos^2 t}{\cos^2 t-\sin^2 t}=\cos 2t$; г) $\frac{\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$.

26. а) $\cos t=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}$; б) $\sin\beta=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}$.



27. Вычислите (без помощи таблиц и калькулятора):

а) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; б) $\left(\sin\frac{7\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{18}\right):\cos\frac{2\pi}{9}$;

в) $\left(\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2$; г) $\dfrac{\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}}$.

2. Тригонометрические функции и их графики

1. Функции синус и косинус. Окружность радиуса 1 с центром в начале координат называют *единичной окружностью.* Пусть точка P_α единичной окружности получена при повороте точки P_0 (1; 0) на угол в α радиан. Нетрудно понять, что ордината точки P_α — это синус угла α, а абсцисса этой точки — косинус угла α (рис. 5).

○ Пример 1. Найдем значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла $\frac{3\pi}{4}$ радиан.

Координаты точки $P_{\frac{3\pi}{4}}$ (рис. 6) нетрудно найти, воспользовавшись свойством равнобедренного прямоугольного треугольника: $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=-1$, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}=-1$. ●

Далее мы считаем, что все углы измерены в радианной мере и поэтому обозначение *рад,* как правило, опускается. Договорившись считать единицу измерения углов (1 радиан) фиксированной, определяем, например, *синус числа* x как синус угла в x радиан; *косинус числа* x как косинус угла в x радиан и т. д.

Определение. **Числовые функции, заданные формулами $y=\sin x$ и $y=\cos x$, называют соответственно *синусом* и *косинусом*** (и обозначают sin и cos).

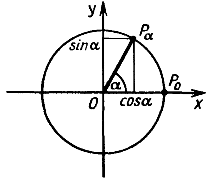


Рис. 5

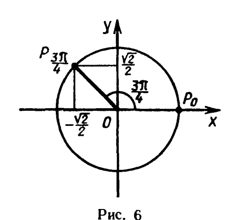


Рис. 6

Область определения этих функций — множество всех действительных чисел. Областью значений функций синус и косинус является отрезок $[-1;\ 1]$, поскольку и ординаты, и абсциссы точек единичной окружности принимают все значения от -1 до 1 Будем обозначать область определения функции f через $D(f)$, а область значений — через $E(f)$. Тогда можно записать:

$$D(\sin)=D(\cos)=\boldsymbol{R};\ E(\sin)=E(\cos)=[-1,\ 1].$$

Напомним следующие известные вам свойства функций синус и косинус.

Для любого x справедливы равенства:

1) $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$;

2) $\sin(x+2\pi n)=\sin x$, $\cos(x+2\pi n)=\cos x$ (n — произвольное целое число).

2. Синусоида. Построим график функции синус на отрезке $[0;\ 2\pi]$. Для этого отметим на оси ординат точки $(0;\ -1)$ и $(0;\ 1)$, а на оси абсцисс точку с абсциссой 2π (обратите внимание: длина отрезка $[0;\ 2\pi]$ приближенно равна 6,28). Разделим отрезок $[0;\ 2\pi]$ и единичную окружность на 16 равных частей (рис. 7) Для построения точки графика с абсциссой α воспользуемся определением синуса: отметим точку P_α на единичной окружности и проведем через P_α прямую, параллельную оси абсцисс (рис. 7) Точка пересечения этой прямой и прямой $x=\alpha$ искомая, так как ее ордината совпадает с ординатой точки P_α, а по определению $\sin\alpha$ равен ординате P_α.

На рисунке 7 показано построение 16 точек графика. Соединяя их плавной кривой, получаем эскиз графика синуса на отрезке $[0;\ 2\pi]$. Для построения графика синуса вне этого отрезка заметим, что $\sin(x+2\pi n)=\sin x$ (n — произвольное целое число). Поэтому во всех точках вида $x_0+2\pi n$, где $0\leqslant x_0\leqslant 2\pi$, значения синуса совпадают, и, следовательно, график синуса на всей прямой получается из построенного графика с помощью параллельных переносов его вдоль оси Ox (вправо и влево) на 2π, 4π, 6π и т. д. (рис. 8). График синуса называется *синусоидой*. Отрезок $[-1;\ 1]$ оси ординат, с помощью которого мы находили значения синуса, иногда называют *линией синусов*.

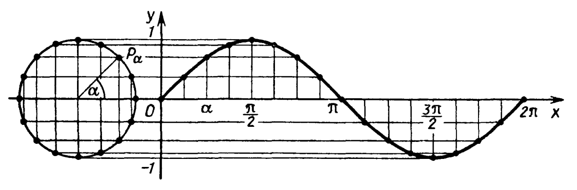
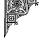


Рис. 7



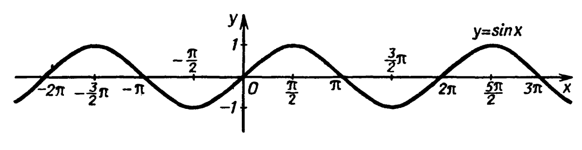


Рис. 8

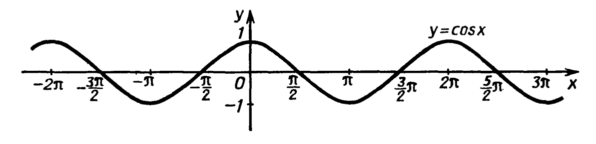


Рис. 9

Для построения графика косинуса напомним, что $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, значение косинуса в произвольной точке x_0 равно значению синуса в точке $x_0+\frac{\pi}{2}$. Это означает, что график косинуса получается из графика синуса с помощью параллельного переноса на расстояние $\frac{\pi}{2}$ в отрицательном направлении оси Ox. Поэтому график функции $y=\cos x$ (рис. 9) также является синусоидой.

3. Функции тангенс и котангенс и их графики.

Определение. **Числовые функции, заданные формулами $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$, называют соответственно *тангенсом* и *котангенсом*** (и обозначают tg и ctg).

Областью определения функции тангенс является множество всех чисел x, для которых $\cos x \neq 0$, т. е. все числа x, не равные $\frac{\pi}{2}+\pi n$ (n «пробегает» все множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$). Область определения котангенса состоит из всех чисел x, для которых $\sin x \neq 0$, т. е. из всех чисел, не равных πn, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Проведем касательную l к единичной окружности в точке P_0 (рис. 10). Пусть α — произвольное число, для которого $\cos\alpha \neq 0$. Тогда точка $P_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha)$ не лежит на оси ординат, и, следовательно, прямая OP_α пересекает l в некоторой точке T_α с абсциссой 1. Найдем ординату этой точки.

Для этого заметим, что прямая OP_α проходит через точки $O(0; 0)$ и $P_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha)$. Поэтому она имеет уравнение $y=x \operatorname{tg}\alpha$.

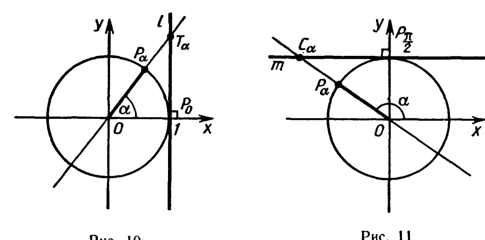


Рис. 10 Рис. 11

Абсцисса точки T_α, лежащей на этой прямой, равна 1. Из уравнения прямой OP_α находим, что ордината точки T_α равна $\operatorname{tg} \alpha$. Итак, ордината точки пересечения прямых OP_α и l равна тангенсу α. Поэтому прямую l и называют *линией тангенсов.*

Нетрудно также доказать, что абсцисса точки C_α пересечения прямой OP_α с касательной m к единичной окружности, проведенной через точку $P_{\frac{\pi}{2}}$ (рис. 11), равна $\operatorname{ctg} \alpha$ при $\sin \alpha \neq 0$. Поэтому прямую m называют *линией котангенсов.*

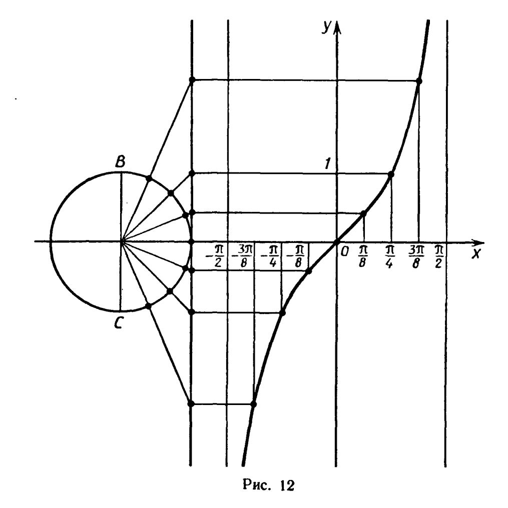


Рис. 12

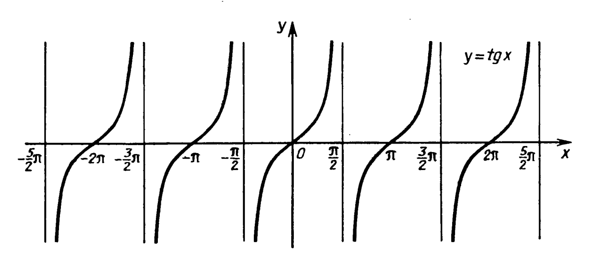


Рис. 13

Область значений тангенса (котангенса) — вся числовая прямая. Докажем это для функции tg. Пусть y_0 — произвольное действительное число. Рассмотрим точку $T(1;\ y_0)$. Как только что было показано, тангенс угла TOx равен y_0. Следовательно, функция tg принимает любое действительное значение y_0, что и требовалось доказать.

Напомним следующие известные вам свойства функций tg и ctg:

1) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$;

2) $\operatorname{tg}(x+\pi n) = \operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg}(x+\pi n) = \operatorname{ctg} x$, $n \in \mathbf{Z}$.

Построение графика тангенса на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 12) аналогично построению, описанному в случае синуса. (Значение функции tg в точке находится с помощью линии тангенсов.) Вследствие тождества $\operatorname{tg}(x+\pi n) = \operatorname{tg} x$ $(n \in \mathbf{Z})$ график тангенса на всей области определения (рис. 13) получается из графика на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ параллельными переносами

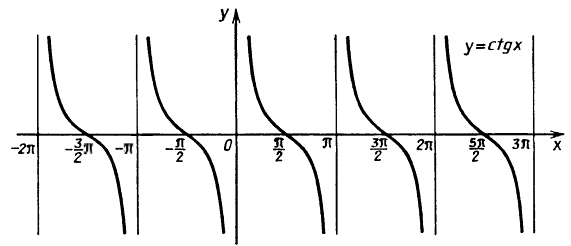


Рис. 14

вдоль оси Ox (вправо и влево) на π, 2π и т. д. График функции tg называют *тангенсоидой.*

График котангенса приведен на рисунке 14.

∇ Синус, косинус, тангенс и котангенс часто называют *основными тригонометрическими функциями.* Иногда рассматривают еще две основные тригонометрические функции — *секанс* и *косеканс* (обозначаются соответственно sec и cosec).

Для того чтобы понять, почему основных тригонометрических функций именно 6, заметим, что тригонометрические функции острого угла α можно определить как отношения сторон прямоугольного треугольника с острым углом α (рис. 3). Таких отношений 6:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c};\ \cos\alpha=\frac{b}{c};\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b};\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a};$$

$$\sec\alpha=\frac{c}{b};\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{c}{a}.\ \blacktriangle$$

Упражнения

28. Отметьте на единичной окружности точку P_α, если:

а) $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; б) $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\alpha=\pi$, $\alpha=-\frac{\pi}{2}$;

в) $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\alpha=\frac{3\pi}{2}$, $\alpha=-\frac{\pi}{4}$; г) $\alpha=-\frac{\pi}{6}$, $\alpha=2\pi$, $\alpha=\frac{5\pi}{4}$.

29. Найдите координаты точки P_α единичной окружности, если α равно:

а) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $-\pi$; б) $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$;

в) $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$, 3π; г) $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{2}$.

30. В какой четверти координатной плоскости расположена точка P_α, если α равно:

а) $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{8\pi}{7}$, $-2{,}7$; б) $\frac{5\pi}{3}$, $1{,}8\pi$, $-3{,}2$;

в) $\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{2\pi}{5}$, $1{,}9$; г) $\frac{5\pi}{9}$, $-2{,}3\pi$, $3{,}7$?

31. Найдите знак числа:

а) $\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{9\pi}{8}\operatorname{tg}2{,}3\pi$; б) $\sin 1\cos 3\operatorname{ctg}5$;

в) $\sin 1{,}3\pi\cos\frac{7\pi}{9}\operatorname{tg}2{,}9$; г) $\sin 8\cos 0{,}7\operatorname{tg}6{,}4$.

32. Найдите значения синуса и косинуса α, если α равно:

а) 4π, $-\pi$; б) $\frac{5\pi}{2}$, $-5{,}5\pi$; в) π, -2π; г) $\frac{9\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$.

33. Постройте график функции:

а) $y=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$; б) $y=-\sin(x+\pi)$;

в) $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; г) $y=\operatorname{tg}(x+\pi)$.

---

34. На единичной окружности отметьте точку $P_\alpha(x; y)$, координаты которой удовлетворяют условию:

а) $y=0{,}5, \quad x>0$; б) $x=-\frac{1}{2}, \quad y>0$;

в) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y>0$; г) $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x<0$.

35. На миллиметровой бумаге постройте единичную окружность, а затем центральный угол α, такой, что:

а) $\sin\alpha=-0{,}5$; б) $\cos\alpha=0{,}3$;
в) $\cos\alpha=-0{,}4$; г) $\operatorname{tg}\alpha=2$.

Найдите область определения и область значений данной функции. Постройте ее график (36—37).

36. а) $y=2+\sin x$; б) $y=1+\operatorname{tg} x$;
в) $y=\cos x-1$; г) $y=3+\sin x$.

37. а) $y=2\sin x$; б) $y=-\frac{1}{2}\cos x$;
в) $y=0{,}5\operatorname{tg} x$; г) $y=-1{,}5\sin x$.

Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции (38—39).

38. а) $y=\sin x$; б) $y=1+\cos x$;
в) $y=\cos x$; г) $y=\sin x-1$.

39. а) $y=x^2-3x$; б) $y=\sin x-1{,}5$;
в) $y=2{,}5+\cos x$; г) $y=\frac{1}{x}+1$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

3. Функции и их графики

1. Числовая функция. С понятием функции вы познакомились в курсе алгебры. При изучении начал анализа удобно принять следующее определение:

Определение. ***Числовой функцией* с областью определения *D* называется соответствие, при котором каждому числу *x* из множества *D* сопоставляется по некоторому правилу число *y*, зависящее от *x*.**

Функции обычно обозначают латинскими (а иногда греческими) буквами. Рассмотрим произвольную функцию f. Независимую переменную x называют также *аргументом функции*. Число y, соответствующее числу x, называют *значением функции* f в точке x и обозначают $f(x)$. Область определения функции f обозначают $D(f)$. Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, таких, что x принадлежит области определения функции f, называют *областью значений функции* f и обозначают $E(f)$.

Чаще всего функцию задают с помощью какой-либо формулы. При этом если не дано дополнительных ограничений, то областью определения функции, заданной формулой, считают множество всех значений переменной, при которых эта формула имеет смысл. Например, формула $f(x)=\frac{1}{x}$ имеет смысл при всех $x\neq 0$, поэтому областью определения функции $f(x)=\frac{1}{x}$ считают множество всех не равных нулю действительных чисел. Область ее значений совпадает с областью определения и является объединением интервалов $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ \infty)$.

Вообще *объединением множеств* A *и* B называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B. Объединение множеств A и B обозначается так: $A\cup B$. Например, объединением отрезков $[0;\ 2]$ и $[1;\ 3]$ является отрезок $[0;\ 3]$.

Символом $\cup$ удобно пользоваться для обозначения числовых множеств, которые можно представить в виде объединения числовых промежутков. Так, для функции $f(x)=\frac{1}{x}$

$$D(f)=E(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty).$$

Область определения функции $y=\operatorname{tg} x$ — объединение всех интервалов вида $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, где $n\in\mathbf{Z}$; область ее значений — вся числовая прямая, т. е. $E(\operatorname{tg})=(-\infty;\ \infty)$.

Функции вида $f(x)=p(x)$, где $p(x)$ — многочлен, называют *целыми рациональными функциями*, а функции вида $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, где p и q — многочлены, называют *дробно-рациональными функциями*. Частное $\frac{p(x)}{q(x)}$ определено, если $q(x)$ не обращается в нуль. Поэтому область определения дробно-рациональной функции $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ — множество всех действительных чисел, из которого исключены корни многочлена $q(x)$.

○ Пример 1. Найдем область определения дробно-рациональной функции

$$f(x)=\frac{7x^8-5x^6+3x^2-4x}{x^3-3x^2+2x}.$$



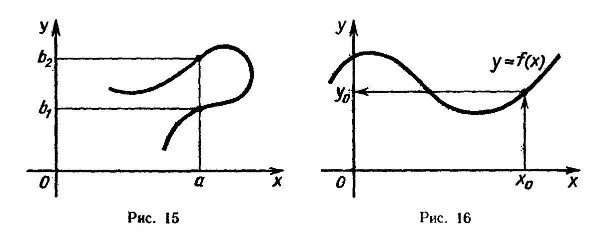


Рис. 15 Рис. 16

Корни многочлена x^3-3x^2+2x — числа 0, 1 и 2. Поэтому $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup(2;\ \infty)$. ●

2. График функции. *Графиком функции* f называют множество всех точек $(x;\ y)$ координатной плоскости, где $y=f(x)$, а x «пробегает» всю область определения функции f.

Подмножество координатной плоскости является графиком какой-либо функции, если оно имеет не более одной общей точки с любой прямой, параллельной оси Oy. Например, множество, изображенное на рисунке 15, не является графиком функции, так как оно содержит две точки с одной и той же абсциссой a, но разными ординатами b_1 и b_2. Если бы мы сочли это множество графиком функции, то пришлось бы считать, что эта функция имеет при $x=a$ сразу два значения b_1 и b_2, что противоречит определению функции.

Часто функцию задают графически. При этом для любого x_0 из области определения легко найти соответствующее значение $y_0=f(x_0)$ функции (рис. 16).

3. Преобразования графиков. Запас функций, графики которых вы умеете строить, пока невелик — это функции $y=kx+b$, $y=ax^2+bx+c$, $y=\frac{k}{x}$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$. Покажем, что, применяя известные из курса геометрии сведения о преобразованиях фигур, этот список можно существенно расширить.

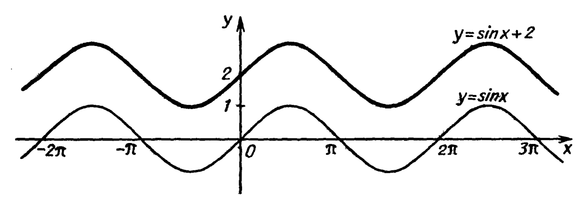


Рис. 17

1) Рассмотрим сначала *параллельный перенос на вектор* $(0; b)$ *вдоль оси ординат*. Обозначая здесь и далее через $(x'; y')$ координаты точки, в которую переходит произвольная точка $(x; y)$ плоскости при данном преобразовании, получим известные вам формулы

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=y+b. \end{cases} \quad (1)$$

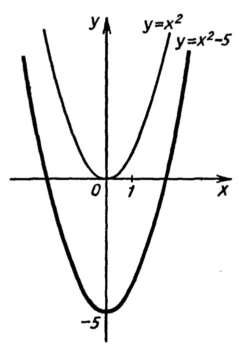


Рис. 18

Пусть f — произвольная функция с областью определения $D(f)$. Выясним, в какую фигуру переходит график этой функции при данном переносе. Из формул (1) сразу получаем, что произвольная точка $(x; f(x))$ графика переходит в точку $(x; f(x)+b)$. Это означает, что график f переходит в фигуру, состоящую из всех точек $(x; f(x)+b)$, где $x \in D(f)$.

По определению графика функции эта фигура является графиком функции $y=f(x)+b$. Сказанное позволяет сформулировать правило:

Для построения графика функции $f(x)+b$, где b — постоянное число, надо перенести график f на вектор $(0; b)$ *вдоль оси ординат.*

○ Пример 2. Построим графики функций: а) $y=\sin x+2$, б) $y=x^2-5$.

а) В соответствии с правилом переносим график функции $y=\sin x$ на вектор $(0; 2)$, т. е. вверх по оси Oy на 2 единицы (рис. 17).

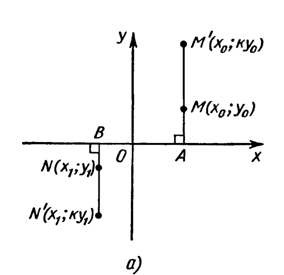
б) Построение осуществляется переносом параболы $y=x^2$ на вектор $(0; -5)$, т. е. вниз по оси Oy (рис. 18). ●

2) Новым для вас преобразованием является *растяжение вдоль оси Oy с коэффициентом k*, которое задается формулами

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=ky. \end{cases} \quad (2)$$

Для построения точки M', в которую переходит данная точка M при растяжении, надо построить на прямой AM, где A — проекция M на ось Ox (рис. 19, *а*), точку, гомотетичную M относительно центра A (коэффициент гомотетии равен коэффициенту k растяжения). На рисунке 19, *б* показано построение точек, в которые переходят данные при растяжениях с коэффициентами $\frac{1}{2}$ и -2.

Выясним, в какую фигуру переходит график функции f при растяжении. Из формул (2) сразу получаем, что произвольная



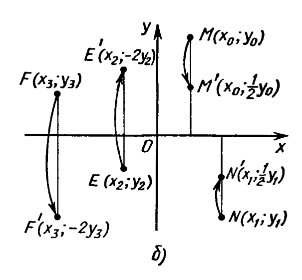


Рис. 19

точка $(x;\ f(x))$ графика f переходит в точку $(x;\ kf(x))$. Отсюда следует, что график f переходит в фигуру, состоящую из всех точек $(x;\ kf(x))$, где $x \in D(f)$. Эта фигура является графиком функции $y = kf(x)$. Доказано следующее правило:

Для построения графика функции $y = kf(x)$ надо растянуть график функции $y = f(x)$ в k раз вдоль оси ординат.

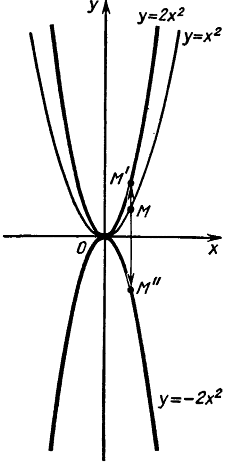


Рис. 20

○ Пример 3. Построим графики функций $y = -2x^2$ и $y = \frac{1}{3}\cos x$.

Построение осуществляется в первом случае из графика функции $y = x^2$ (рис. 20), а во втором случае сначала строим график функции $y = \cos x$, затем воспользуемся растяжением вдоль оси ординат с коэффициентом $\frac{1}{3}$ (рис. 21). ●

Замечание. Если $0 < |k| < 1$, то растяжение с коэффициентом k часто называют *сжатием*. Например, растяжение с коэффициентом $\frac{1}{2}$ называют сжатием в 2 раза. Отметим также, что если $k < 0$, то для построения графика функции $y = kf(x)$ надо сначала растянуть график f в $|k|$ раз, а затем отразить его симметрично относительно оси абсцисс (см. рис. 20).

3) *Параллельный перенос вдоль оси абсцисс на вектор* $(a;\ 0)$ задается формулами

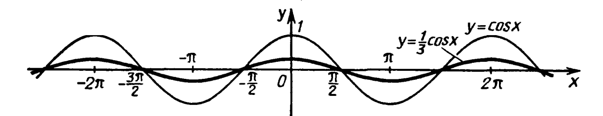


Рис. 21

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y. \end{cases} \qquad (3)$$

Каждая точка графика функции f переходит согласно формулам (3) в точку $(x+a;\ f(x))$. Поэтому с помощью переменных x', y' можно записать, что график f переходит в фигуру Ф, состоящую из точек $(x',\ f(x'-a))$, где x' принимает все значения вида $x+a$ (x «пробегает» $D(f)$).

Именно при этих значениях x' число $x'-a$ принадлежит $D(f)$ и $f(x'-a)$ определено. Следовательно, фигура Ф есть график функции $y=f(x-a)$. Итак, можно сделать вывод:

График функции $y=f(x-a)$ получается из графика f переносом (вдоль оси абсцисс) на вектор $(a;\ 0)$.

Обратите внимание: если $a>0$, то вектор $(a;\ 0)$ направлен в положительном направлении оси абсцисс, а при $a<0$ — в отрицательном.

○ Пример 4. Построение графиков функций $y=\sqrt{x+1}$ и $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ показано на рисунках 22 и 23. ●

4) *Растяжение вдоль оси Ox с коэффициентом k задается формулами*

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = y. \end{cases} \qquad (4)$$

Произвольная точка графика функции f переходит при таком растяжении в точку $(kx;\ f(x))$. Переходя к переменным x', y', можно записать, что график $y=f(x)$ переходит в фигуру, состоящую из точек $\left(x';\ f\left(\frac{x'}{k}\right)\right)$, где x' принимает все значения вида $x'=kx$, а $x \in D(f)$.

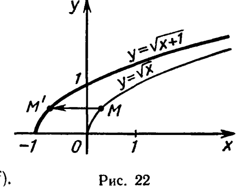


Рис. 22

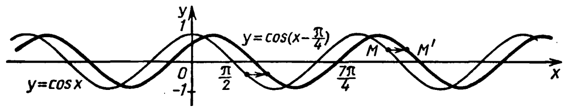


Рис. 23



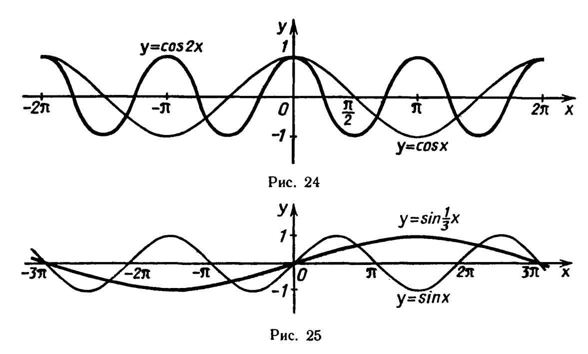


Рис. 24

Рис. 25

Эта фигура есть график функции $y=f\left(\frac{x}{k}\right)$. Итак:

Для построения графика функции $y=f\left(\frac{x}{k}\right)$ *надо подвергнуть график функции* f *растяжению с коэффициентом* k *вдоль оси абсцисс.*

○ П р и м е р 5. Построение графиков функций $y=\cos 2x$ и $y=$ $=\sin \frac{1}{3}x$ показано на рисунках 24 и 25. ●

▽ **4. Отображение.** Функцию с областью определения D и областью значений E называют также *отображением множества* D *на множество* E. Можно сказать, например, что формула $y=\sin x$ задает отображение множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел на отрезок $[-1;\ 1]$. Слова «функция» и «отображение» — синонимы.

Нередко рассматривают функции (отображения), область определения или область значений которых (а возможно, и оба этих множества) не являются числовыми множествами. С такими примерами, по существу, вы уже встречались в курсе геометрии. Например, областью определения функции «Площадь многоугольника» при фиксированной единице измерения площадей является множество многоугольников плоскости. Область значений этой функции — множество неотрицательных чисел (площадь 0 имеют «вырожденные» многоугольники, например отрезок).

Движение (так же как и преобразование подобия), переводящее фигуру F в фигуру F', также является отображением, его область определения F и область значений F' состоят из точек.

Понятие отображения часто относят к числу основных понятий всей математики. С его помощью можно дать такое определение функции: функцией с областью определения D и областью значений E называется отображение множества D на множество

E, при котором каждому элементу множества D соответствует один вполне определенный элемент множества E и каждый элемент множества E поставлен в соответствие некоторому (хотя бы одному) элементу множества D. ▲

Упражнения

40. Найдите значения функции:

а) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ в точках -1, $\frac{1}{2}$, 10;

б) $f(x)=3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ в точках $-\frac{\pi}{4}$, 0, π;

в) $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$ в точках 0, 1, 2;

г) $f(x)=2-\sin 2x$ в точках $-\frac{\pi}{4}$, 0, $\frac{5\pi}{12}$.

41. Запишите значения функции:

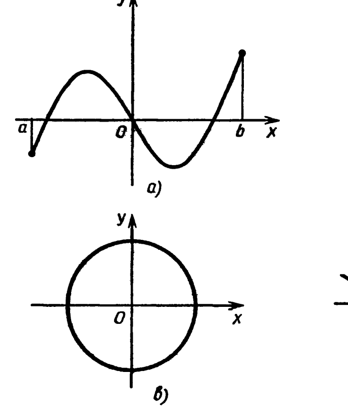
а) $f(x)=x^2+2x$ в точках x_0, $t+1$;

б) $f(x)=\operatorname{tg} 2x$ в точках a, $b-1$;

в) $f(x)=\frac{1}{x}+1$ в точках x_0, $a+2$;

г) $f(x)=2\cos\frac{x}{3}$ в точках z, $h+\pi$.

42. Является ли графиком функции фигура, изображенная на рисунке 26, *а* — *г*?



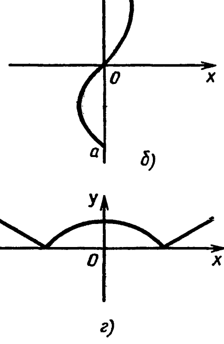


Рис. 26



Найдите область определения каждой из функций (43—44)

43. а) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4x+3}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$;

в) $f(x)=\frac{5-x^2}{x^2+2x-8}$; г) $f(x)=\sqrt{36-x^2}$.

44. а) $f(x)=\frac{1}{x^3}$; б) $f(x)=2\operatorname{tg} x$;

в) $f(x)=1+\operatorname{ctg} x$; г) $f(x)=\frac{1}{x^4}$.

45. Найдите область определения и область значений каждой из функций:

а) $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $y=2+\frac{4}{x-3}$;

в) $y=\frac{3}{x+1}-1$; г) $y=3+0{,}5\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

46. Найдите область определения и область значений функции, график которой изображен на рисунке 27, *а* — *г*.

47. Начертите график какой-нибудь функции f, для которой:

а) $D(f)=[-2;\ 4]$, $E(f)=[-3;\ 3]$;

б) $D(f)=(-5;\ 3)$, $E(f)=[2;\ 6]$;

в) $D(f)=(0;\ 7)$, $E(f)=[-1;\ 6]$;

г) $D(f)=[-4;\ 0]$, $E(f)=(1;\ 4)$.

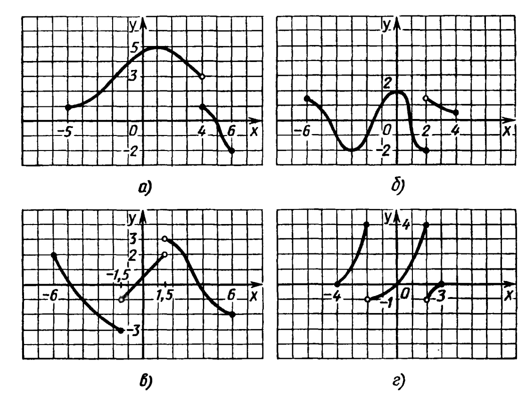


Рис. 27

48. В одной и той же системе координат постройте графики функций:

а) $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x}+2$, $y=\frac{1}{x-2}$;

б) $y=\cos x$, $y=\cos x-3$, $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y=-x^2$, $y=4-x^2$, $y=-(x-2)^2$;

г) $y=\sin x$, $y=\sin x+2$, $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Постройте графики функций (49—50).

49. а) $y=\frac{1}{x-3}$; б) $y=(x-2)^2-4$;

в) $y=1-(x+2)^2$; г) $y=2+\frac{1}{x}$.

50. а) $y=1+2\sin x$; б) $y=\sqrt{x+1}-1$;

в) $y=0{,}5\cos x-1$; г) $y=2+\sqrt{x-1}$.

---

51. Найдите значения функции:

а) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } x\geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x<0, \end{cases}$ в точках -2; $-\frac{1}{3}$; 0; 5;

б) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, \text{ если } x\geqslant -1, \\ 1-x, \text{ если } x<-1, \end{cases}$ в точках -2; -1; 0; 4;

в) $f(x)=\begin{cases} \sin x, \text{ если } x>0, \\ \cos x-1, \text{ если } x\leqslant 0, \end{cases}$ в точках $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{3}$; 0; $\frac{\pi}{6}$;

г) $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } x>0, \\ 0, \text{ если } x=0, \\ -1, \text{ если } x<0, \end{cases}$ в точках $-1{,}7$; $-\sqrt{2}$; 0; 3,8.

52. а) Основание AC треугольника ABC равно b, высота BD равна h. Через точку K высоты BD проведена прямая, параллельная AC. Выразите площади фигур, на которые делит эта прямая данный треугольник, как функции от расстояния $BK=x$.

б) Радианная мера центрального угла равна x, радиус круга равен R. Выразите площадь соответствующего сегмента как функцию от x.

в) Радианная мера центрального угла сектора равна α, радиус равен r. Выразите периметр сектора как функцию от угла α.

г) Прямая, параллельная диагонали квадрата, делит его на две фигуры. Задайте формулой зависимость между площадью каждой фигуры и длиной x меньшего отрезка, отсекаемого данной прямой от диагонали, если сторона квадрата равна a.

53. Найдите область определения функции:

а) $y=\frac{\sqrt{3x-2}}{x^2-x-2}$; б) $y=\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{16-x^2}$;



в) $y=\frac{\sqrt{x+2}}{3-2x}$;　　　г) $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{1-2x}$.

54. Найдите область определения и область значений функции:

а) $y=1+\sin^2 x$;　　　б) $y=\frac{x-1}{x}$;

в) $y=\sqrt{x^2+4}$;　　　г) $y=1{,}5-0{,}5\cos^2 x$.

Постройте графики функций (55—56).

55. а) $y=|x-1|$;　　　б) $y=\begin{cases} x^2-4, & \text{если } x\geqslant 2, \\ 2-x, & \text{если } x<2; \end{cases}$

в) $y=\sqrt{2x-2}$;　　　г) $y=\begin{cases} 3-x^2, & \text{если } x>1, \\ x-2, & \text{если } x\leqslant 1. \end{cases}$

56. а) $y=\sin 3x-1$;　　　б) $y=\frac{1}{2}x^3+2$;

в) $y=1+\cos 2x$;　　　г) $y=1+\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

4. Четные и нечетные функции. Периодичность тригонометрических функций

1. Четные и нечетные функции. Рассмотрим функции, области определения которых симметричны относительно начала координат, т. е. для любого x из области определения число $(-x)$ также принадлежит области определения. Среди таких функций выделяют четные и нечетные.

Определение. **Функция f называется *четной*, если для любого x из ее области определения $f(-x)=f(x)$** (рис. 28).

Определение. **Функция f *нечетна*, если для любого x из ее области определения $f(-x)=-f(x)$** (рис. 29).

○ Пример 1. Функция $f(x)=x^4$ четная, а функция $g(x)=x^3$ нечетная. Действительно, область определения каждой из них (это вся числовая прямая) симметрична относительно точки O и для любого x выполнены равенства $f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$,

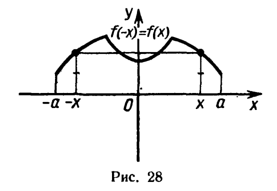


Рис. 28

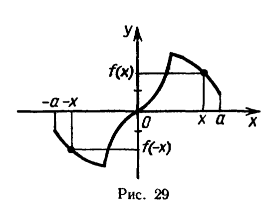


Рис. 29

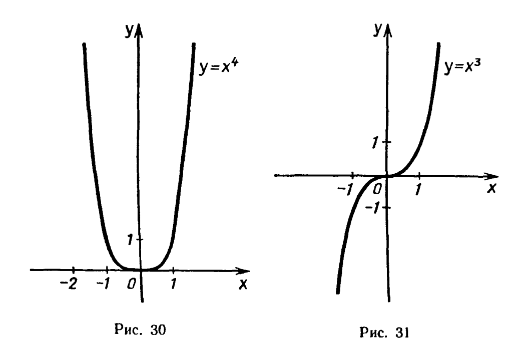


Рис. 30 Рис. 31

$g(-x)=(-x)^3=-x^3=-g(x)$. Графики этих функций изображены на рисунках 30 и 31. ●

При построении графиков четных и нечетных функций будем пользоваться следующими известными из курса алгебры **свойствами:**

1°. *График четной функции симметричен относительно оси ординат.*

2°. *График нечетной функции симметричен относительно начала координат.*

Из этих двух правил вытекает следующее: при построении графика четной или нечетной функции достаточно построить его часть для неотрицательных x, а затем отразить полученный график относительно оси ординат (в случае четной функции) или начала координат (в случае нечетной).

○ Пример 2. Функция $f(x)=x+\frac{1}{x}$ нечетная (докажите это самостоятельно). Ее график симметричен относительно начала координат (рис. 32). ●

Основные тригонометрические функции синус, тангенс и котангенс являются нечетными, а косинус — четной функцией (см. п. 2). Поэтому графики синуса, тангенса и котангенса (рис. 8, 13, 14) симметричны относительно начала координат, а график косинуса (рис. 9) симметричен относительно оси ординат.

○ Пример 3. Функция $f(x)=\frac{x^3+x}{x^3-x}$ четная, так как ее область определения симметрична относительно точки $x=0$ (она состоит из всех чисел, отличных от -1, 0 и 1) и для всех $x \in D(f)$ выполнено равенство

$$f(-x)=\frac{(-x)^3+(-x)}{(-x)^3-(-x)}=\frac{-x^3-x}{x-x^3}=\frac{x^3+x}{x^3-x}=f(x).$$



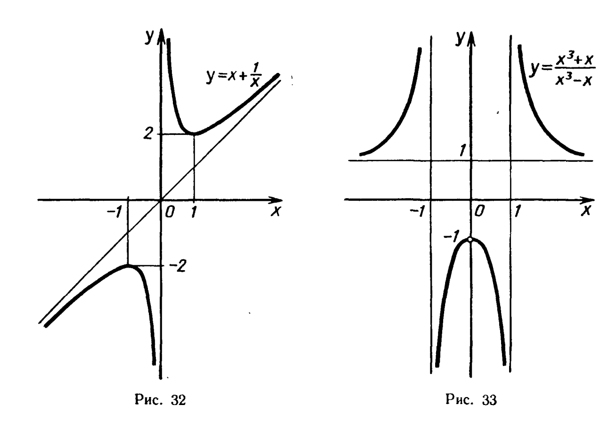


Рис. 32 Рис. 33

График этой функции симметричен относительно оси Oy (рис. 33).

Пример 4. Функция $f(x)=x^2+x$ не является ни четной, ни нечетной. Ее область определения симметрична относительно точки 0, но, например, при $x=1$ не выполнено ни равенство $f(1)=f(-1)$, ни равенство $f(1)=-f(-1)$, поскольку $f(1)=2$, а $f(-1)=0$. ●

2. Периодические функции. Очень многие процессы и явления, с которыми мы встречаемся в практике, имеют повторяющийся характер. Так, взаимное расположение Солнца и Земли повторяется через год. Положения маятника в моменты времени, отличающиеся на период колебания маятника, одинаковы.

Такого рода процессы называют периодическими, а функции, их описывающие,— периодическими функциями.

Известные вам основные тригонометрические функции — периодические. Так для любого числа x и любого целого k выполнено равенство $\sin(x+2\pi k)=\sin x$. Отсюда следует, что $2\pi k$ — период функции синус ($k\neq 0$ — произвольное целое число).

Вообще, говоря о периодичности функции f, полагают, что имеется такое число $T\neq 0$, что область определения $D(f)$ вместе с каждой точкой x содержит и точки, получающиеся из x параллельными переносами вдоль оси Ox (вправо и влево) на расстояние T. Функцию f называют *периодической* с периодом $T\neq 0$, если для любого x из области определения значения этой функции в точках x, $x-T$ и $x+T$ равны, т. е. $f(x+T)=f(x)=$ $=f(x-T)$.

Поскольку синус и косинус определены на всей числовой прямой и $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$ для любого x, синус и косинус — периодические функции с периодом 2π.

Тангенс и котангенс — периодические функции с периодом π. В самом деле, области определения этих функций вместе с каждым x содержат числа $x+\pi$ и $x-\pi$ и верны равенства $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg} x$.

Очевидно, что если функция f периодическая с периодом T, то при любом целом $n\neq 0$ число nT тоже период этой функции. Например, при $n=3$, воспользовавшись несколько раз определением периодической функции, находим:

$$f(x+3T)=f((x+2T)+T)=f(x+2T)=f((x+T)+T)=$$
$$=f(x+T)=f(x).$$

Докажем, что:

а) *наименьший положительный период функций* $y=\sin x$ *и* $y=\cos x$ *равен* 2π;

б) *наименьшим положительным периодом функций* $y=\operatorname{tg} x$ *и* $y=\operatorname{ctg} x$ *является число* π.

∇ а) Как уже отмечалось, число 2π является периодом функций sin и cos. Поэтому остается доказать, что положительное число, меньшее 2π, не может быть их периодом. Докажем это.

Если T — произвольный период косинуса, то $\cos(\alpha+T)=\cos\alpha$ при любом α. Полагая $\alpha=0$, находим $\cos T=\cos 0=1$. Наименьшее положительное число T, для которого $\cos x=1$, есть 2π.

Пусть T — произвольный положительный период синуса. Тогда $\sin(\alpha+T)=\sin\alpha$ при любом α. Полагая $\alpha=\frac{\pi}{2}$, получаем $\sin\left(T+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$. Но $\sin x=1$ только при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Поэтому $T=2\pi n$. Наименьшее положительное число вида $2\pi n$ есть 2π.

б) Если T — положительный период тангенса, то $\operatorname{tg} T=\operatorname{tg}(0+T)=\operatorname{tg} 0=0$. Так как на интервале $(0;\ \pi)$ тангенс нулей не имеет, $T\geqslant\pi$. Ранее доказано, что π — период функции tg, и, значит, π — это наименьший положительный период тангенса. Для функции ctg доказательство аналогично. ▲

Как правило, слова «наименьший положительный период» опускают. Принято, например, говорить, что период тангенса равен π, а период синуса равен 2π.

Периодичностью основных тригонометрических функций мы уже фактически пользовались ранее, при построении графиков. Справедливо следующее утверждение:

Для построения графика периодической функции с периодом T достаточно провести построение на отрезке длиной T и затем полученный график параллельно перенести на расстояния nT вправо и влево вдоль оси Ox (рис. 34, здесь n — любое натуральное число).

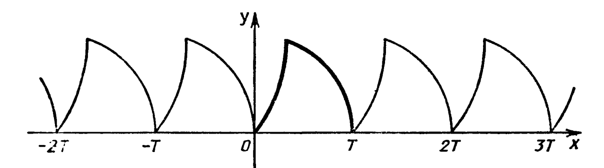


Рис. 34

Действительно, пусть $(x_0;\ y_0)$ — точка графика периодической функции f. Тогда точка x_0+nT при любом целом n принадлежит области определения f (см. замечание в начале пункта) и вследствие периодичности f справедливо равенство $f(x_0+nT)=f(x_0)=$ $=y_0$. Значит, точка $(x_0+nT;\ y_0)$, полученная при параллельном переносе точки $(x_0;\ y_0)$ вдоль оси Ox на вектор $(nT;\ 0)$, тоже принадлежит графику f.

○ Пример 5. Построим график функции $f(x)=2\cos x+1$. Для построения воспользуемся тем, что функция f периодическая с периодом 2π. Действительно, функция f определена на всей прямой и, значит, вместе с произвольной точкой x_0 ее область определения содержит точки, получающиеся из x_0 параллельными переносами вдоль оси Ox вправо и влево на 2π. Кроме того, вследствие периодичности косинуса $f(x+2\pi)=2\cos(x+2\pi)+1=$ $=2\cos x+1=f(x)$. Пользуясь свойством графиков периодических функций, строим график f сначала на отрезке $[0;\ 2\pi]$ (для этого в соответствии с известными правилами преобразования графиков растягиваем график косинуса вдоль оси Oy в 2 раза и сдвигаем его на 1 вверх, рис. 35), а затем с помощью параллельных переносов продолжаем его на всю числовую прямую (рис. 36). ●

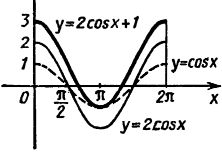


Рис. 35

▽ Пример 6. Докажем, что функция $f(x)=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ периоди-

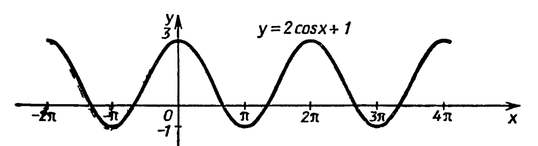


Рис. 36

ческая и ее наименьший положительный период равен $\frac{\pi}{2}$. Тангенс определен при всех значениях аргумента, не равных $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Поэтому область определения данной функции состоит из таких x, что $2x-\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, т. е. $x \neq \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. Отсюда следует, что $D(f)$ наряду с произвольным x_0 содержит и все точки вида $x_0+\frac{\pi n}{2}$, $x_0-\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. Очевидно, что число $\frac{\pi}{2}$ является периодом f, так как $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=$ $=\operatorname{tg}\left(\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\pi\right)=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$. Остается доказать, что число $\frac{\pi}{2}$ — наименьший положительный период f. Допустим, что периодом f является такое число T_0, что $T_0<\frac{\pi}{2}$. Тогда для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(x+T_0)=\operatorname{tg}\left(2(x+\right.$ $\left.+T_0)-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+2T_0\right)=f(x)=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$, поскольку T_0 — период f. Но это означает, что $2T_0$ — период функции tg. По предположению $T_0<\frac{\pi}{2}$, и, значит, $2T_0<\pi$. Пришли к противоречию с доказанным ранее: наименьший положительный период тангенса равен π. ▲

Аналогично доказывается общее утверждение:

Если функция f периодическая и имеет период T, то функция $Af(kx+b)$, где A, k и b постоянны, а $k \neq 0$, также периодична, причем ее период равен $\frac{T}{|k|}$.

Из этого утверждения сразу получаем, что, например, периодом функции $\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$ является число $\frac{2\pi}{3}$, а период функции $\cos\left(-\frac{x}{2}+\pi\right)$ равен 4π.

Упражнения

Докажите, что функции являются четными (57—58).

57. а) $f(x)=3x^2+x^4$; б) $f(x)=x^5 \sin \frac{x}{2}$;

в) $f(x)=x^2 \cos x$; г) $f(x)=4x^6-x^2$.

58. а) $f(x)=\frac{\cos 5x+1}{|x|}$; б) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2-1}$;

в) $f(x)=\frac{2 \sin \frac{x}{2}}{x^3}$; г) $f(x)=\frac{\cos x^3}{4-x^2}$

Докажите, что функции являются нечетными (59—60).

59. а) $f(x)=x^3 \sin x^2$; б) $f(x)=x^2(2x-x^3)$;
в) $f(x)=x^5 \cos 3x$; г) $f(x)=x(5-x^2)$.

60. а) $f(x)=\frac{x^4+1}{2x^3}$; б) $f(x)=\frac{\cos x^3}{x(25-x^2)}$;
в) $f(x)=\frac{3x}{x^6+2}$; г) $f(x)=\frac{x^2 \sin x}{x^2-9}$.

61. На рисунке 37, *а* — *г* построен график функции f для всех x, удовлетворяющих условию $x \geqslant 0$ ($x \leqslant 0$). Постройте график функции f, если известно: 1) f — четная функция; 2) f — нечетная функция.

62. Докажите, что число T является периодом функции f, если:

а) $f(x)=\sin \frac{x}{2}$, $T=4\pi$; б) $f(x)=2 \operatorname{tg} 3x$, $T=\frac{\pi}{3}$;

в) $f(x)=3 \cos 4x$, $T=\frac{\pi}{2}$; г) $f(x)=\operatorname{ctg} \frac{x}{3}$, $T=3\pi$.

63. Докажите, что функция f является периодической:
а) $f(x)=2-\cos x$; б) $f(x)=\operatorname{tg} 2x$;
в) $f(x)=\sin x+\cos x$; г) $f(x)=3+\sin^2 x$.

Найдите наименьший положительный период каждой из функций (64—65).

64. а) $y=\frac{1}{2}\sin \frac{x}{4}$; б) $y=3 \operatorname{tg} 1{,}5x$;

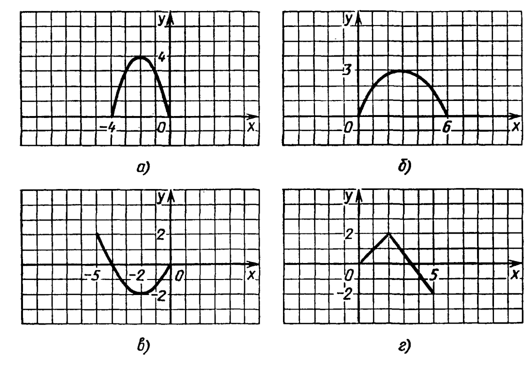


Рис. 37

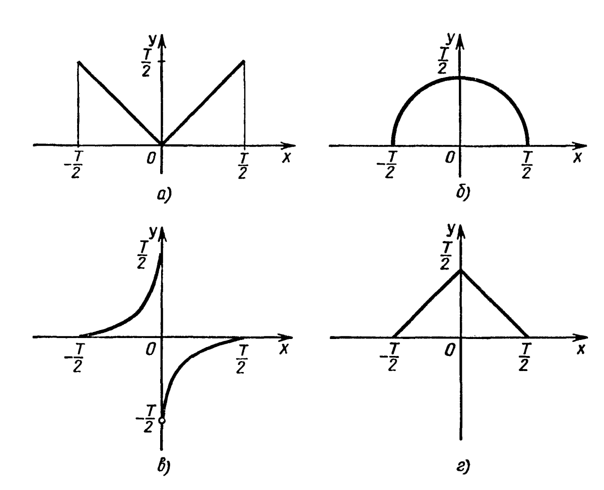


Рис. 38

в) $y=4\cos 2x$; г) $y=5\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

65. а) $y=\sin x\cos x$; б) $y=\sin x\sin 4x-\cos x\cos 4x$;
в) $y=\sin^2 x-\cos^2 x$; г) $y=\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x$.

66. На рисунке 38, *а* — *г* изображена часть графика функции, имеющей период T. Постройте график этой функции на промежутке $[-1{,}5T;\ 2{,}5T]$.

67. Найдите наименьший положительный период и постройте график функции:

а) $y=\sin 2x$; б) $y=\cos\frac{x}{3}$; в) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $y=\sin 1{,}5x$.

68. Для функции f ученик проверил справедливость двух равенств и сделал вывод, что T является периодом f. Прав ли ученик, если:

а) $f(x)=\sin x$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, $T=\frac{2\pi}{3}$;

б) $f(x)=\cos x$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=0$, $T=\pi$;

в) $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{если } x\leqslant 1,\\ 3-x, & \text{если } x>1,\end{cases}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0{,}5$, $f\left(-\frac{1}{2}+3\right)=0{,}5$, $T=3$.

г) $f(x)=x+|x|$, $f(-4)=0$, $f(-4+3)=0$, $T=3$?

Какие из указанных ниже функций являются четными, какие — нечетными, а какие не являются ни четными, ни нечетными (69—70)?

69. а) $y=\sin x+\operatorname{ctg} x-x$; б) $y=\frac{|x|}{\sin x\cos x}$;

в) $y=x^4+\operatorname{tg}^2 x+x\sin x$; г) $y=\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x}{|x|}$.

70. а) $y=\frac{\sin x}{x^3-1}$; б) $y=\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$;

в) $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$; г) $y=\frac{x+\operatorname{tg} x}{x\cos x}$.

71. Докажите, что данная функция является четной или нечетной, и постройте ее график:

а) $y=\frac{1}{x^2}$; б) $y=\frac{1}{x^3}$.

72. Функции f и g определены на множестве всех действительных чисел. Является ли функция h четной или нечетной, если:

а) $h(x)=f(x)g^2(x)$, f — четная функция, g — нечетная;

б) $h(x)=f(x)-g(x)$, f и g — четные функции;

в) $h(x)=f(x)+g(x)$, f и g — нечетные функции;

г) $h(x)=f(x)g(x)$, f и g — нечетные функции?

73. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y=\sin^2 x$; б) $y=\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$;

в) $y=\sin^4 x-\cos^4 x$; г) $y=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$.

74. Постройте график функции:

а) $y=1-\cos 1{,}5x$; б) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $y=2+\sin\frac{x}{2}$; г) $y=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

75. Докажите, что если функция $y=f(x)$ периодическая, то и функция $y=kf(x)+b$ периодическая.

76. Докажите, что число 2 не является периодом функции:

а) $y=x^2-3$; б) $y=\cos x$; в) $y=3x-5$; г) $y=|x|$.

5. Возрастание и убывание функций. Экстремумы

1. Возрастание и убывание функций. Вы уже знакомы с понятием возрастающей и убывающей функций. Так, на рисунке 39 изображен график функции, определенной на отрезке $[-1; 10]$. Эта функция возрастает на отрезках $[-1; 3]$ и $[4; 5]$, убывает на отрезках $[3; 4]$ и $[5; 10]$. Известно, что функция $y=x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; \infty)$. График этой функции при изменении x от $-\infty$ до ∞ сначала «опускается» до нуля (значение функции в точке 0 равно нулю), а затем «поднимается» до бесконечности (см. рис. 20).

Определение. **Функция f *возрастает* на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2)>f(x_1)$.**

Определение. **Функция f *убывает* на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2)<f(x_1)$.**

Иными словами, функция f называется возрастающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции. Функция f называется убывающей на множестве P, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

○ Пример 1. Докажем, что функция $f(x)=x^n$ $(n \in N)$ при нечетном n возрастает на всей числовой прямой, а при четном n функция $f(x)=x^n$ возрастает на промежутке $[0; \infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

Докажем сначала, что функция $f(x)=x^n$ возрастает на промежутке $[0; \infty)$ при любом натуральном n. Пусть $x_2>x_1\geqslant 0$. Тогда по свойству степени $x_2^n>x_1^n$. Теперь рассмотрим случай четного n. Пусть $x_1<x_2\leqslant 0$. Тогда $-x_1>-x_2\geqslant 0$ и $(-x_1)^n>(-x_2)^n\geqslant 0$, т. е. $x_1^n>x_2^n$. Тем самым доказано, что функция $f(x)=x^n$ убывает на $(-\infty; 0]$ при четном n. Осталось рассмотреть случай нечетного n. Если $x_1<0<x_2$, то $x_1^n<0<x_2^n$. Если $x_1<x_2\leqslant 0$, то $-x_1>-x_2\geqslant 0$ и потому $(-x_1)^n>(-x_2)^n\geqslant 0$, т. е. $-x_1^n>-x_2^n$, откуда следует, что $x_2^n>x_1^n$. Итак, доказано, что для нечетного n из неравенства $x_2>x_1$ следует неравенство $x_2^n>x_1^n$. Согласно определению функция $f(x)=x^n$ при нечетном n возрастает на всей числовой прямой.

Пример 2. Докажем, что если функция $y=f(x)$ возрастает на множестве P, то функция $y=-f(x)$ убывает на множестве P. Пусть x_1 и x_2 — любые два числа из множества P, такие, что $x_2>x_1$. Надо доказать, что $-f(x_2)<-f(x_1)$, т. е. $f(x_1)<f(x_2)$. Но это — очевидное следствие условия: f возрастает на множестве P.

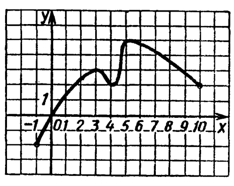
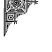


Рис. 39



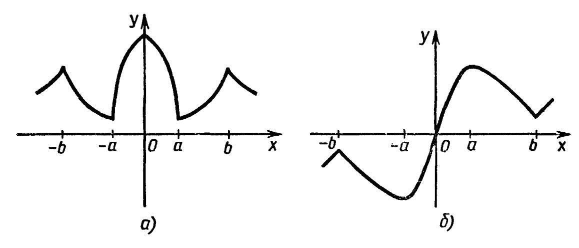


Рис. 40

Пример 3. Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$ (докажите самостоятельно). Однако эта функция не является убывающей на объединении этих промежутков. Например, $1>-1$, но $f(1)>f(-1)$. ●

При исследовании функций на возрастание и убывание принято указывать промежутки возрастания и убывания максимальной длины, включая концы (если, конечно, они входят в эти промежутки). Так, можно было сказать, что функция $f(x)=\frac{1}{x}$ убывает на отрезке $[2; 100]$. Это верно, но такой ответ неполон.

Замечание. Для четных и нечетных функций задача нахождения промежутков возрастания и убывания несколько упрощается: достаточно найти эти промежутки при $x\geqslant 0$ (рис. 40).

Пусть, например, функция f четна и возрастает на промежутке $[a; b]$, где $b>a\geqslant 0$. Докажем, что эта функция убывает на промежутке $[-b; -a]$.

Действительно, пусть $-a\geqslant x_2>x_1\geqslant -b$. Тогда $f(-x_2)=f(x_2)$, $f(-x_1)=f(x_1)$, причем $a\leqslant -x_2<-x_1\leqslant b$, и поскольку f возрастает на $[a; b]$, имеем $f(-x_1)>f(-x_2)$, т. е. $f(x_1)>f(x_2)$.

2. Возрастание и убывание тригонометрических функций. Докажем сначала, что синус возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in \mathbf{Z}$. В силу периодичности синуса доказательство достаточно провести для отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Пусть $x_2>x_1$. Применяя формулу разности синусов, находим:

$$\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}. \qquad (1)$$

Из неравенства $-\frac{\pi}{2}\leqslant x_1<x_2\leqslant\frac{\pi}{2}$ следует, что $0<\frac{x_2-x_1}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$.

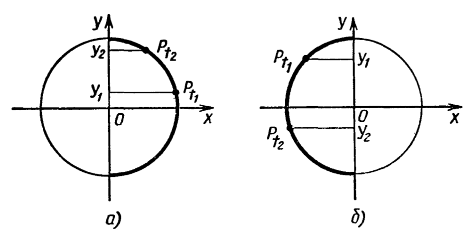


Рис. 41

Поэтому $\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0$, $\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$. Из (1) вытекает, что разность $\sin x_2-\sin x_1$ положительна, т. е. $\sin x_2>\sin x_1$. Тем самым доказано, что синус возрастает на указанных промежутках. Аналогично доказывается, что промежутки $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$, являются промежутками убывания синуса.

Заметим, что полученный результат легко проиллюстрировать с помощью единичной окружности: если $-\frac{\pi}{2}\leqslant t_1<t_2\leqslant\frac{\pi}{2}$, то точка P_{t_2} имеет, естественно, ординату, большую, чем ордината точки P_{t_1} (рис. 41, *а*). Если $\frac{\pi}{2}\leqslant t_1<t_2\leqslant\frac{3\pi}{2}$, то ордината точки P_{t_2} меньше ординаты точки P_{t_1} (рис. 41, *б*).

Промежутками возрастания косинуса являются отрезки $[-\pi+2\pi n; 2\pi n]$, где $n\in\boldsymbol{Z}$, а промежутками убывания — отрезки $[2\pi n; \pi+2\pi n]$, где $n\in\boldsymbol{Z}$. Доказательство можно провести примерно так же, как и в случае синуса. Проще же воспользоваться формулой приведения $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Из нее сразу следует, например, что промежутками возрастания косинуса являются промежутки, полученные из промежутков возрастания синуса сдвигом на $\frac{\pi}{2}$ влево.

Докажем, что функция тангенс возрастает на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, где $n\in\boldsymbol{Z}$. В силу периодичности тангенса доказательство достаточно провести для интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Пусть x_1 и x_2 — произвольные числа из этого интервала, такие, что $x_2>x_1$. Надо доказать, что $\operatorname{tg} x_2>\operatorname{tg} x_1$. Имеем

$$\operatorname{tg} x_2-\operatorname{tg} x_1=\frac{\sin x_2}{\cos x_2}-\frac{\sin x_1}{\cos x_1}=\frac{\sin x_2\cos x_1-\sin x_1\cos x_2}{\cos x_2\cos x_1}=\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_1\cos x_2}.$$

По предположению $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$. Поэтому $\cos x_1>0$, $\cos x_2>0$. А так как $0<x_2-x_1<\pi$, то и $\sin(x_2-x_1)>0$. Следовательно, $\operatorname{tg} x_2-\operatorname{tg} x_1>0$, т. е. $\operatorname{tg} x_2>\operatorname{tg} x_1$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что ctg убывает на промежутках $(\pi n; \pi+\pi n)$, где $n\in \mathbf{Z}$.

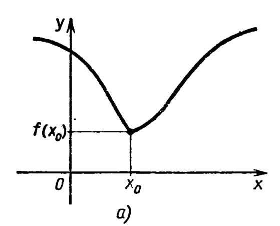
3. **Экстремумы.** При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки удобно пользоваться понятием окрестности. *Окрестностью точки а* называется любой интервал, содержащий эту точку. Например, интервал (2; 6) — одна из окрестностей точки 3, интервал (—3,3; —2,7) — окрестность точки —3.

Изучая график рисунка 39, можно прийти к выводу, что наиболее «заметными» точками области определения являются такие точки x, в которых возрастание функции сменяется убыванием (точки 3 и 5) или, наоборот, убывание сменяется возрастанием (точка 4). Эти точки называют соответственно *точками максимума* ($x_{max}=3$ и $x_{max}=5$) и *минимума* ($x_{min}=4$).

При построении графиков конкретных функций полезно предварительно найти такие точки. Например, для функции sin это точки вида $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. Возьмем для определенности $x_0=$ $=\frac{\pi}{2}$. Эта точка является правым концом промежутка возрастания синуса, и поэтому $1=\sin x_0>\sin x$, если $-\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$. Кроме того, $x_0=\frac{\pi}{2}$ — левый конец промежутка убывания, и следовательно, $\sin x<\sin x_0$ при $\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{3\pi}{2}$. Итак, $\sin\frac{\pi}{2}>\sin x$ для любого x, лежащего в окрестности $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ точки $x_0=\frac{\pi}{2}$, и поэтому $x_0=\frac{\pi}{2}$ — точка максимума функции синус.

В точке $-\frac{\pi}{2}$, наоборот, убывание функции меняется на возрастание (слева от $-\frac{\pi}{2}$ функция убывает, а справа возрастает). Рассуждая аналогично, получаем, что $\sin x>\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=$ $=-1$ в некоторой окрестности точки $-\frac{\pi}{2}$, и поэтому $-\frac{\pi}{2}$ — точка минимума функции синус. Дадим точные определения точек экстремума.

Определение. **Точка x_0 называется *точкой минимума функции f*, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x)\geqslant f(x_0)$** (рис. 42).



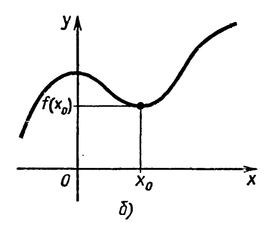
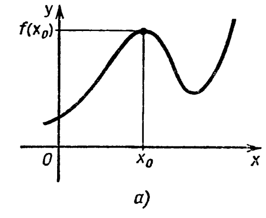


Рис. 42



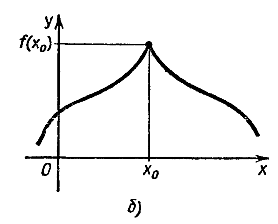


Рис. 43

Определение. **Точка x_0 называется *точкой максимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$** (рис. 43).

По определению значение функции f в точке максимума x_0 является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции в окрестности x_0, как правило, имеет вид гладкого «холма» (рис. 43, *а* и рис. 44 — точки x_1, x_2, x_3) или заостренного «пика» (рис. 43, *б*). В окрестности точки минимума графики, как правило, изображаются в виде «впадины», тоже или гладкой (рис. 42, *б* — точка x_0, рис. 44 — точки x_4, x_5), или заостренной (рис. 42, *а* — точка x_0 и рис. 44— точка x_6).

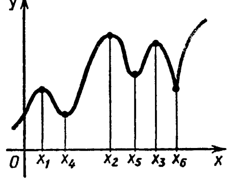


Рис. 44

Другие примеры поведения графиков функций в точках максимума или минимума приведены на рисунках 45 (*а* — точка максимума), 46 (*а* — точка минимума) и 47 (здесь каждая точка промежутка

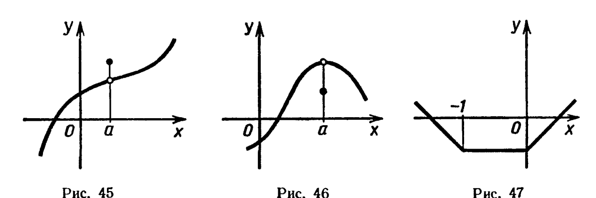


Рис. 45 Рис. 46 Рис. 47

(—1; 0) является как точкой минимума, так и точкой максимума).

Для точек максимума и минимума функции принято общее название — их называют *точками экстремума*. Значения функции в этих точках называют соответственно *максимумами* и *минимумами* функции (общее название — *экстремум функции*). Точки максимума обозначают x_{max}, а точки минимума x_{min}. Значения функции в этих точках обозначаются соответственно y_{max} и y_{min}.

Упражнения

77. Для функций, графики которых изображены на рисунках 48, *а* — *г*, найдите:
а) промежутки возрастания и убывания функции;

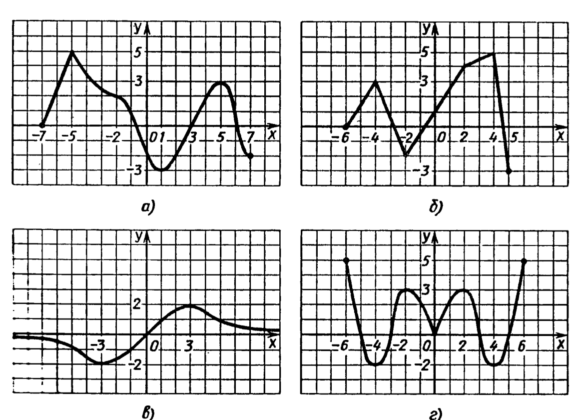


Рис. 48

б) точки максимума и минимума функции;
в) экстремумы функции.

Начертите эскиз графика функции f (78—80).

78. а) f возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$ и убывает на промежутке $[2; \infty)$;
б) f возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; 3]$, убывает на промежутках $[-2; 0]$ и $[3; \infty)$;
в) f убывает на промежутке $(-\infty; -1]$ и возрастает на промежутке $[-1; \infty)$;
г) f убывает на промежутках $(-\infty; 1]$ и $[4; \infty)$, возрастает на промежутке $[1; 4]$.

79. а) $x_{max}=-3$, $x_{min}=4$, $f(-3)=5$, $f(4)=-5$;
б) $x_{min}=-2$, $x_{min}=2$, $x_{max}=0$, $f(-2)=f(2)=-3$. $f(0)=2$;
в) $x_{min}=-5$, $x_{max}=2$, $f(-5)=1$, $f(2)=6$;
г) $x_{max}=-4$, $x_{max}=3$, $x_{min}=-1$, $f(-4)=5$, $f(3)=2$, $f(-1)=-2$.

80. а) f — четная функция, $x_{max}=-3$, $x_{min}=0$, $f(-3)=4$, $f(0)=0$;
б) f — нечетная функция, $x_{max}=2$, $x_{min}=5$, $f(2)=3$, $f(5)=-4$;
в) f — четная функция, $x_{min}=4$, $x_{max}=0$, $f(4)=-2$, $f(0)=2$;
г) f — нечетная функция, $x_{min}=-4$, $x_{max}=-1$, $f(-4)=-3$, $f(-1)=1$.

81. Докажите, что функция $y=kx+b$:
а) возрастает на множестве $\boldsymbol{R}$ при $k>0$;
б) убывает на множестве $\boldsymbol{R}$ при $k<0$.

Найдите промежутки возрастания и убывания, точки максимума и точки минимума функции, ее максимумы и минимумы (82—85).

82. а) $y=-x^2+6x-8$; б) $y=(x+2)^4+1$;
в) $y=x^2-4x$; г) $y=(x-3)^4$.

83. а) $y=\frac{3}{x-2}$; б) $y=-(x+3)^5$;
в) $y=-\frac{1}{x+3}$; г) $y=(x-4)^3$.

84. а) $y=3\sin x-1$; б) $y=-2\cos x+1$;
в) $y=2\cos x+1$; г) $y=0{,}5\sin x-1{,}5$.

85. а) $y=1+2\operatorname{tg} x$; б) $y=\sin x+1$;
в) $y=-\operatorname{tg} x$; г) $y=\cos x-1$.

86. Сравните числа:
а) $\cos\frac{3\pi}{7}$ и $\cos\frac{2\pi}{9}$; б) $\sin\frac{5\pi}{7}$ и $\sin\frac{7\pi}{8}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{7}$ и $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$; г) $\sin\frac{4\pi}{9}$ и $\sin\frac{3\pi}{8}$.

87. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\sin 3{,}2$, $\sin 3{,}8$, $\sin 1{,}3$; б) $\cos 0{,}9$, $\cos 1{,}9$, $\cos 1{,}3$;
в) $\operatorname{tg} 0{,}5$, $\operatorname{tg} 1{,}4$, $\operatorname{tg}(-0{,}3)$; г) $\sin 1{,}2$, $\sin(-1{,}2)$, $\sin 0{,}8$.

Найдите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и экстремумы функции (88—89).

88. а) $y=\frac{1}{(x-2)^2}+1$; б) $y=4|x|-x^2$;

в) $y=\frac{1}{(x+1)^3}-2$; г) $y=x^2-2|x|$.

89. а) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=1-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; г) $y=2+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

90. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\cos\frac{25\pi}{9}$, $\sin\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$, $\operatorname{ctg}\frac{15\pi}{8}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{16}\right)$;

в) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{10}$, $\operatorname{ctg}\frac{12\pi}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$, $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{15}$;

г) $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$, $\cos\frac{13\pi}{24}$, $\sin\frac{5\pi}{24}$, $\sin\frac{17\pi}{6}$.

91. Докажите, что функция:

а) $f(x)=x^4+3x$ возрастает на $[0; \infty)$;
б) $f(x)=-x^3-2x$ убывает на $\boldsymbol{R}$;
в) $f(x)=x^6-0{,}5$ убывает на $(-\infty; 0]$;
г) $f(x)=x^5+1{,}5x$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

92. Докажите следующие утверждения:

а) если f — четная функция, x_0 — точка максимума, то $-x_0$ является точкой максимума;
б) если f — нечетная функция и на промежутке $[a; b]$ она убывает, то и на промежутке $[-b; -a]$ функция f убывает;
в) если f — нечетная функция, x_0 — точка минимума, то $-x_0$ является точкой максимума;
г) если f — четная функция и на промежутке $[a; b]$ функция возрастает, то на промежутке $[-b; -a]$ она убывает.

6. Исследование функций

1. Построение графиков функций. Ранее вы строили графики функций «по точкам». Во многих случаях этот метод дает хорошие результаты, если, конечно, отметить достаточно большое число точек. Однако при этом приходится составлять большие таблицы значений функции, а главное, можно не заметить существенных особенностей функции и в итоге ошибиться при построении графика.

Предположим, например, что, вычислив значения функции в 15 точках и отметив соответствующие точки графика на координатной плоскости, мы пришли к рисунку 49. Естественно предположить, что эскиз графика близок к непрерывной кривой, проходящей через все эти точки (рис. 50). Однако «настоящий» график (естественно, проходящий через все эти точки) может быть совершенно не похож на этот эскиз (рис. 51—53).

Для того чтобы избежать ошибок, надо научиться выявлять характерные особенности функции, т. е. предварительно провести ее исследование. Пусть, например, о функции f нам известно, что она:

— определена на объединении промежутков $(-\infty; -10)$ $(-10; 10)$, $(10; \infty)$;

— обращается в нуль в точках -11 и 0, отрицательна на интервалах $(-\infty; -11)$, $(-10; 0)$ и положительна на интервалах $(-11; -10)$; $(0; 10)$ и $(10; \infty)$;

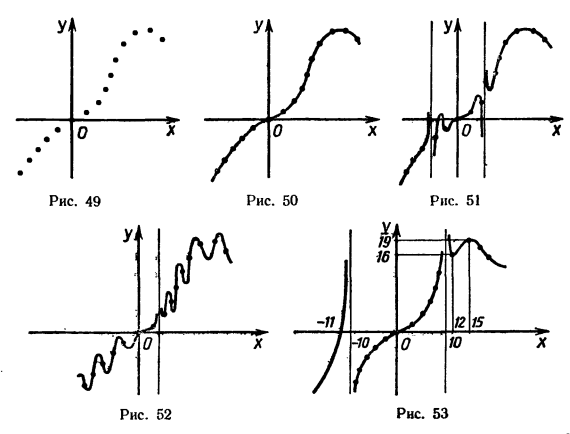


Рис. 49 Рис. 50 Рис. 51

Рис. 52 Рис. 53

— возрастает на промежутках $(-\infty; -10)$ и $(-10; 10)$, $[12; 15]$ и убывает на промежутках $(10; 12]$ и $[15; \infty)$;

— имеет минимум в точке 12, причем $f(12)=16$, и максимум в точке 15, причем $f(15)=19$;

— наконец, значения f при приближении значений аргумента к -10 и 10 неограниченно возрастают по абсолютной величине.

Эти сведения позволяют понять, что эскиз графика функции примерно таков, каким он изображен на рисунке 53.

Рассмотрим еще один пример: исследуем функцию

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}.$$

1) Найдем область определения функции. В данном случае $D(f)$ — вся числовая прямая, поскольку знаменатель x^2+1 не обращается в нуль.

2) Заметим, что функция f четная: для любого x

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}=\frac{1}{x^2+1}=f(x).$$

Поэтому достаточно исследовать функцию и построить ее график при $x \geqslant 0$, затем остается отразить построенную часть графика относительно оси ординат.

3) Найдем точки пересечения графика f с осями координат. Ось ординат график f пересекает в точке $(0; f(0))$. Значение $f(0)$ равно 1. Поэтому график f проходит через точку $(0; 1)$.

Для того чтобы найти точки пересечения графика функции f с осью абсцисс, надо решить уравнение $f(x)=0$ (его корни называют *нулями функции*). Уравнение $\frac{1}{x^2+1}=0$ не имеет корней. Значит, график f не пересекает ось абсцисс.

4) Выясним, на каких промежутках функция f принимает положительные, а на каких — отрицательные значения; их называют *промежутками знакопостоянства функции*. Над этими промежутками график функции лежит выше (соответственно ниже) оси абсцисс. В данном случае, поскольку при любом x значение x^2+1 положительно, $f(x)>0$ на всей числовой прямой.

5) Существенно облегчают построение графика сведения о том, на каких промежутках функция возрастает или убывает (эти промежутки называют *промежутками возрастания* или *убывания* функции). Докажем, что для рассматриваемой функции промежуток возрастания — это $(-\infty; 0]$, а промежуток убывания — $[0; \infty)$.

Пусть x_1 и x_2 — два значения из промежутка $[0; \infty)$, причем $x_2>x_1$. Поскольку x_1 и x_2 положительны, из условия $x_2>x_1$ следует $x_2^2>x_1^2$, $x_2^2+1>x_1^2+1$ и, наконец, $\frac{1}{x_2^2+1}<\frac{1}{x_1^2+1}$. Итак, $f(x_2)<f(x_1)$, т. е. функция f убывает на промежутке $[0; \infty)$.

На промежутке $(-\infty; 0]$ функция f возрастает. Доказатель-

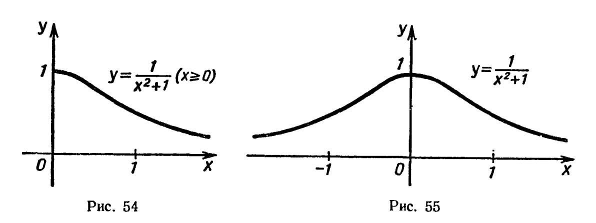


Рис. 54 Рис. 55

ство проводится аналогично (можно также воспользоваться четностью данной функции).

6) Найдем значения функции в точках, в которых возрастание сменяется убыванием или наоборот. В нашем случае имеется лишь одна точка, принадлежащая одновременно и промежутку возрастания, и промежутку убывания,— это точка 0. Точка 0 — точка максимума функции $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; $f(0)=1$.

7) Заметим, наконец, что при неограниченном увеличении x значение x^2+1 неограниченно возрастает, а потому значения $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ (оставаясь положительными) приближаются к нулю.

Полученных в ходе исследования свойств функции $f(x)=$ $=\frac{1}{x^2+1}$ достаточно для построения ее графика.

Построим точку графика (0; 1). Мы установили, что $[0; \infty)$ — промежуток убывания функции f. Поэтому правее точки с абсциссой 0 график рисуем в виде кривой, которая «идет вниз» (рис. 54). Так как $f(x)>0$ при любом x, эта кривая не может опуститься ниже оси абсцисс, причем (см. п. 7 исследования) при продолжении вправо график неограниченно приближается к оси абсцисс. Остается воспользоваться четностью функции f: график f получаем, отразив построенную для $x\geqslant 0$ кривую симметрично относительно оси ординат (рис. 55).

2. Схема исследования функций. При исследовании функций мы будем придерживаться описанной схемы. В общем случае исследование предусматривает решение следующих задач:

1) Найти области определения и значений данной функции f.

2) Выяснить, обладает ли функция особенностями, облегчающими исследование, т. е. является ли функция f: а) четной или нечетной; б) периодической.

3) Вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат.

4) Найти промежутки знакопостоянства функции f.

5) Выяснить, на каких промежутках функция f возрастает, а на каких убывает.

6) Найти точки экстремума, вид экстремума (максимум или минимум) и вычислить значения f в этих точках.

7) Исследовать поведение функции f в окрестности характерных точек, не входящих в область определения (например, точка $x=0$ для функции $f(x)=\frac{1}{x}$), и при больших (по модулю) значениях аргумента.

Необходимо заметить, что этот план имеет примерный характер. Так, для нахождения точек пересечения с осью абсцисс надо решить уравнение $f(x)=0$, чего мы не умеем делать даже в случае, когда $f(x)$, например, многочлен пятой степени. (Существуют, правда, методы, которые во многих случаях позволяют найти число корней такого уравнения и сами корни с любой точностью.) Поэтому часто тот или иной этап исследования приходится опускать. Однако по возможности в ходе исследования функций желательно придерживаться этой схемы.

Наиболее трудным этапом исследования является, как правило, поиск промежутков возрастания (убывания), точек экстремума. В следующей главе вы познакомитесь с общими методами решения этих задач, основанными на применении методов математического анализа.

▽ Вертикальные прямые, к которым неограниченно приближается график функции f (например, прямая $x=0$ для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ или прямые $x=\pm 10$ для графика функции, изображенного на рисунке 53), называют *вертикальными асимптотами.*

Чаще всего график имеет вертикальную асимптоту $x=a$ в случае, если выражение, задающее данную функцию, имеет вид дроби, знаменатель которой обращается в нуль в точке a, а числитель нет. Например, график функции $f(x)=\frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x=0$. Для графика функции $f(x)=\operatorname{tg} x$ вертикальными асимптотами являются прямые $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, где $n\in \mathbf{Z}$.

Если график функции неограниченно приближается к некоторой горизонтальной (в случае функции $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ это прямая $y=0$, см. рис. 55) или наклонной (прямая $y=x$ для графика функции $f(x)=x+\frac{1}{x}$, см. рис. 32) прямой при неограниченном возрастании (по модулю) x, то такую прямую называют *горизонтальной* (соответственно *наклонной*) *асимптотой.* ▲

3. «Чтение» графиков. В большинстве разобранных выше примеров и задач на построение графиков функций вы встречались с такой ситуацией: функция задана формулой, требуется исследовать ее свойства и построить график f. Представляет значи-

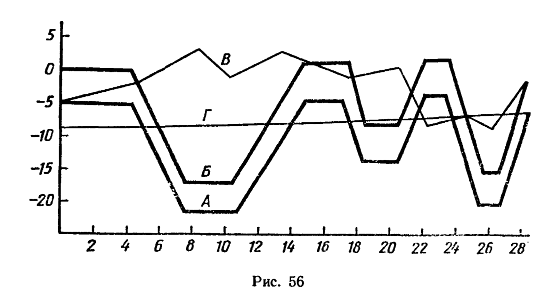


Рис. 56

тельный практический интерес другая задача: задан график *f*, с помощью которого требуется перечислить основные свойства этой функции.

Подобные задачи часто решаются в ходе экспериментальных исследований. Построение графиков при этом осуществляется разными методами. Например, по точкам, найденным экспериментально. Существуют также многочисленные приборы-самописцы. Это, например, осциллографы, на экранах которых электрические колебания преобразуются в наглядные графические изображения. Другим примером прибора, позволяющего получить наглядное графическое описание, служит кардиограф; «прочитывая» полученную с его помощью кардиограмму, врачи делают выводы о состоянии сердечной деятельности.

С довольно типичным примером трудностей, возникающих при исследовании реальных процессов, для описания которых еще не созданы точные теории, вы можете познакомиться, рассмотрев рисунок 56. Здесь приведены графики среднесуточного хода температур по Московской области в феврале 1974 г. Толстой линией изображены «теоретические кривые» *А* и *Б*, фиксирующие результаты долгосрочного прогноза (поскольку прогноз дается с точностью до 5°, кривых две). «Читая» этот график, мы находим, например, что предполагались три «волны холода» (в период с 4 по 10, с 17 по 19 и с 23 по 26 февраля). Предполагалось также отсутствие оттепелей и в целом холодная (до —17° —22°) погода. Однако в действительности (график фактического хода температур изображен тонкой линией *В*) температура была выше нормы на 5—10° (климатическая норма, являющаяся результатом многолетних наблюдений, задана линией *Г*), в период с 4 по 8 февраля было потепление, а не похолодание и т. д. Эти и другие сведения о прогнозе и реальной картине вы можете получить, «читая» графики, приведенные на рисунке 56.



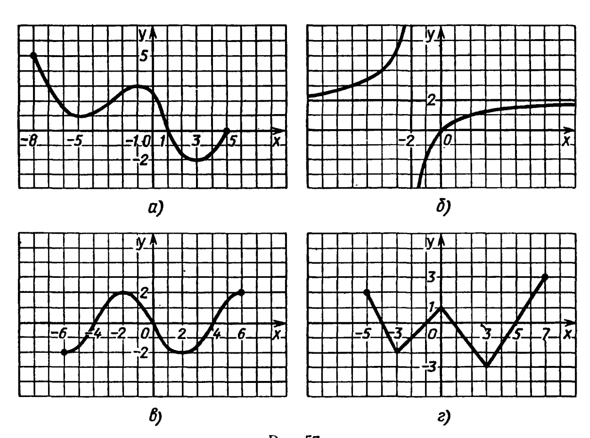


Рис. 57

Упражнения

93. Проведите по общей схеме исследование функции, заданной графиком (рис. 57).

94. Постройте график функции f, если известны ее свойства (см. таблицу):

	Свойство функции	а)	б)	в)	г)
1	Область определения Область значений	[−6; 6] [−2; 5]	[−5; 4] [0; 6]	[−4; 4] [−3; 6]	[−5; 3] [0; 5]
2	Точки пересечения графика: а) с осью Ox б) с осью Oy	$A(-4;\ 0)$, $B(-2;\ 0)$ $C(0;\ 2{,}5)$	$O(0;\ 0)$	$A(-4;\ 0)$, $B(-1;\ 0)$, $C(2{,}5;\ 0)$ $D(0;\ -2)$	$A(3;\ 0)$ $B(0;\ 4{,}5)$

	Свойство функции	а)	б)	в)	г)
3	Промежутки знакопостоянства: а) $f(x)>0$ б) $f(x)<0$	$[-6;\ -4)$, $(-2;\ 6]$ $(-4;\ -2)$	$[-5;\ 0)$, $(0;\ 4]$ —	$(-4;\ -1)$, $(2{,}5;\ 4)$ $(-1;\ 2{,}5)$	$[-5;\ 3)$ —
4	Промежутки: а) возрастания б) убывания	$[-3;\ 1]$, $[4;\ 6]$ $[-6;\ -3]$, $[1;\ 4]$	$[-5;\ -2]$, $[0;\ 4]$ $[-2;\ 0]$	$[-4;\ -2]$, $[1;\ 4]$ $[-2;\ 1]$	$[-3;\ 1]$ $[-5;\ -3]$, $[1;\ 3]$
5	Точки максимума, максимум функции Точки минимума, минимум функции	$1,\ f(1)=3$ $-3,\ f(-3)=-2$ $4,\ f(4)=1$	$-2,\ f(-2)=2$ $0,\ f(0)=0$	$-2,\ f(-2)=2$ $1,\ f(1)=-3$	$1,\ f(1)=5$ $-3,\ f(-3)=2$
6	Дополнительные точки графика	$f(-6)=3$ $f(6)=5$	$f(-5)=0{,}5$ $f(4)=6$	$f(4)=6$	$f(-5)=3$

Проведите по общей схеме исследование каждой из функций и постройте ее график (95—97).

95. а) $f(x)=5-2x$; б) $f(x)=3-2x-x^2$;
в) $f(x)=3x-2$; г) $f(x)=x^2-3x+2$.

96. а) $f(x)=\frac{1}{x}-2$; б) $f(x)=-(x-3)^4$;
в) $f(x)=\frac{1}{x+2}$; г) $f(x)=x^3-1$.

97. а) $f(x)=\sqrt{x-3}$; б) $f(x)=4x-x^2$;
в) $f(x)=\sqrt{x+1}$; г) $f(x)=4-x^2$.

Проведите по общей схеме исследование каждой из функций и постройте ее график (98—99).

98. а) $f(x)=x^4+4x^2$; б) $f(x)=1-\sqrt{x+4}$;

в) $f(x)=x^3+x$; г) $f(x)=\sqrt{x-2}-2$.

99. а) $f(x)=x^2-2|x|+1$; б) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$;

в) $f(x)=|x|-x^2$; г) $f(x)=\frac{2x+1}{x}$.

7. Свойства тригонометрических функций. Гармонические колебания

1. Исследование тригонометрических функций. Свойства изучаемых функций удобно записывать согласно приведенной в предыдущем пункте схеме. Сведем уже известные вам свойства функций синус, косинус, тангенс и котангенс в таблицу (см. с. 55). (Всюду предполагается, что $n \in \mathbf{Z}$.)

В таблице принята следующая нумерация свойств функции f:
1.1 — область определения;
1.2 — область значений;
2.1 — четность (нечетность);
2.2 — наименьший положительный период;
3.1 — координаты точек пересечения графика f с осью Ox;
3.2 — координаты точек пересечения графика f с осью Oy;
4.1 — промежутки, на которых f принимает положительные значения;
4.2 — промежутки, на которых f принимает отрицательные значения;
5.1 — промежутки возрастания;
5.2 — промежутки убывания;
6.1 — точки минимума;
6.2 — минимумы функции;
6.3 — точки максимума;
6.4 — максимумы функции.

Свойства тригонометрических функций часто применяются при решении задач.

○ Пример 1. Расположим в порядке возрастания числа $\sin(-1)$, $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$, $\sin 4$.

Пользуясь формулами приведения, запишем эти числа в таком виде, чтобы значения аргумента принадлежали одному из промежутков возрастания синуса — отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin 2=\sin(\pi-2),\ \sin 3=\sin(\pi-3),\ \sin 4=\sin(\pi-4).$$

Очевидно, что

$$-\frac{\pi}{2}<-1<\pi-4<\pi-3<1<\pi-2<\frac{\pi}{2},$$

	Функция			
	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\cos x$	$f(x)=\mathrm{tg}\, x$	$f(x)=\mathrm{ctg}\, x$
1.1	R	R	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	$(\pi n; \pi+\pi n)$
1.2	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	R	R
2.1	Нечетная	Четная	Нечетная	Нечетная
2.2	2π	2π	π	π
3.1	$(\pi n; 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; 0\right)$	$(\pi n; 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; 0\right)$
3.2	$(0; 0)$	$(0; 1)$	$(0; 0)$	Нет
4.1	$(2\pi n; \pi+2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$
4.2	$(-\pi+2\pi n; 2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\right)$
5.1	$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$	$[-\pi+2\pi n; 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	Нет
5.2	$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$	$[2\pi n; \pi+2\pi n]$	Нет	$(\pi n; \pi+\pi n)$
6.1	$-\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$\pi+2\pi n$	Нет	Нет
6.2	-1	-1	Нет	Нет
6.3	$\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$2\pi n$	Нет	Нет
6.4	1	1	Нет	Нет



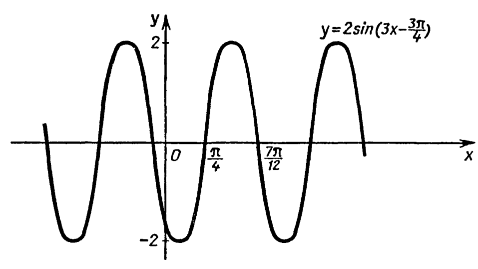


Рис. 58

поэтому

$$\sin(-1) < \sin(\pi-4) < \sin(\pi-3) < \sin 1 < \sin(\pi-2).$$

Итак, $\sin(-1) < \sin 4 < \sin 3 < \sin 1 < \sin 2$. ●

Рассмотрим график функции $f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$ (рис. 58). Он получается при помощи следующей последовательности преобразований:

а) сжатием графика функции $y = \sin x$ в 3 раза вдоль оси абсцисс получаем график функции $y = \sin 3x$ (рис. 59);

б) переносом графика функции $y = \sin 3x$ на вектор $\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ по-

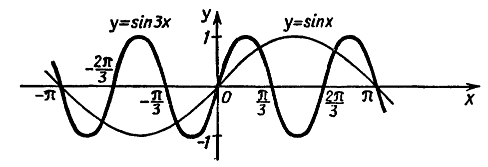


Рис. 59

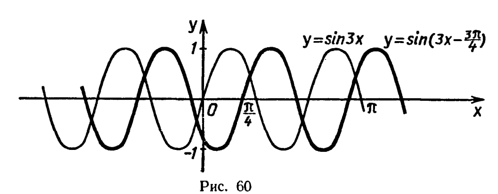


Рис. 60

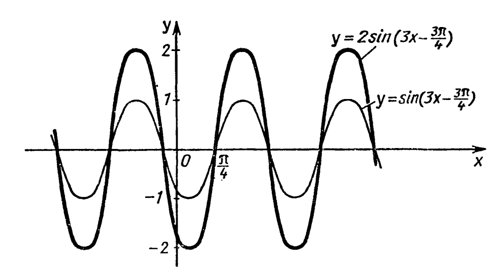


Рис. 61

лучаем график функции $y=\sin 3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, т. е. $y=\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$ (рис. 60);

в) растяжением графика $y=\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$ в 2 раза вдоль оси ординат получаем график функции $y=2\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$ (рис. 61).

При преобразованиях, изученных в п. 3, «форма» кривой сохраняется (так же как при движениях и преобразованиях подобия). Поэтому синусоидой называют не только график синуса, но и любую кривую, полученную из него при помощи сжатий (растяжений) вдоль осей и последующих движений или преобразований подобия. Это же замечание справедливо для других кривых, например параболы или гиперболы.

То обстоятельство, что свойства функций вида $f(x)=A\sin(kx+b)$ и $f(x)=A\cos(kx+b)$ аналогичны свойствам синуса (или косинуса), позволяет сравнительно быстро провести исследование таких функций: главное — найти их период и точки, в которых значения равны 0 и $\pm A$.

○ Пример 2. Исследуем функцию

$$f(x)=2\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$$

и построим ее график.

Период функции f равен $\frac{2\pi}{3}$ (см. п. 4). Синус обращается в нуль в точках вида πn, $n\in\mathbf{Z}$, поэтому $f(x)=0$ при $3x-\frac{3\pi}{4}=\pi n$, т. е. при $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. Затем, решая уравнения $f(x)=-2$ и $f(x)=2$, получим $\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)=-1$ при $3x-\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, откуда $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; $\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)=1$ при $3x-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, отку-

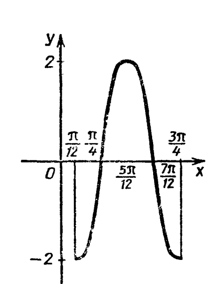


Рис. 62

да $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Отметим полученные точки на оси абсцисс. Достаточно рассмотреть отрезок, длина которого равна периоду. В данном случае удобно взять отрезок $\left[\frac{\pi}{12};\ \frac{3\pi}{4}\right]$, левый конец которого является точкой минимума функции (рис. 62). Далее рисуем график функции f, возрастающей от -2 до 2 на отрезке $\left[\frac{\pi}{12};\ \frac{5\pi}{12}\right]$ и убывающей от 2 до -2 на отрезке $\left[\frac{5\pi}{12};\ \frac{3\pi}{4}\right]$. При этом график должен пересекать ось абсцисс в точках $\left(\frac{\pi}{4};\ 0\right)$ и $\left(\frac{7\pi}{12};\ 0\right)$. Эскиз графика функции f на всей числовой прямой получается из графика рисунка 62 сдвигами на $\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$, вдоль оси абсцисс (рис. 58). ●

2. Гармонические колебания. Величины, меняющиеся согласно закону

$$f(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (1)$$

или

$$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi), \qquad (2)$$

играют важную роль в физике. По такому закону меняется, например, координата шарика, подвешенного на пружине (рис. 149). Говорят, что шарик совершает *гармонические колебания.*

Функцию (2) тоже можно записать в виде (1):

$$A\sin(\omega t+\varphi)=A\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right).$$

Параметры A, ω и φ, полностью определяющие колебание (1), имеют специальные названия: A называют *амплитудой колебания*, ω — *циклической* (или круговой) *частотой колебания*, φ — *начальной фазой колебания* (обычно берут $\varphi\in[0;\ 2\pi)$). Период функций $A\sin(\omega t+\varphi)$ и $A\cos(\omega t+\varphi)$, равный $\frac{2\pi}{\omega}$, называют *периодом гармонического колебания.*

Свойства функций (1) и (2) удобно проиллюстрировать на следующем примере из механики. Пусть точка M движется равномерно по окружности радиуса $R=A$ с угловой скоростью ω (при $\omega>0$ вращение против часовой стрелки, а при $\omega<0$ — по часовой стрелке), причем в начальный момент времени $t=0$ вектор $\overrightarrow{OM}$ составляет угол φ с положительным направлением оси абсцисс

(рис. 63). Рассмотрим две следующие функции от t — координаты проекций точки на оси абсцисс и ординат — функции $x(t)$ и $y(t)$.

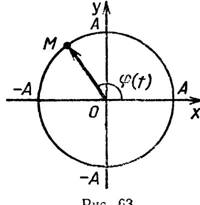


Рис. 63

В момент времени t вектор $\overrightarrow{OM}$ составляет с положительным направлением оси Ox угол $\varphi(t)$, при этом $\varphi(t)=\varphi+\omega t$ согласно закону равномерного движения по окружности. По определению функций синус и косинус

$$x(t)=A\cos\varphi(t), \text{ т. е. } x(t)=A\cos(\omega t+\varphi),$$
$$y(t)=A\sin\varphi(t), \text{ т. е. } y(t)=A\sin(\omega t+\varphi).$$

Изучим свойства этих функций, опираясь на кинематические соображения. Их период равен, очевидно, времени T, за которое точка совершает один оборот. Длина окружности равна $2\pi A$, а линейная скорость v точки равна ωA, поэтому $T=\frac{2\pi A}{v}=\frac{2\pi}{\omega}$.

Рассмотрим один из моментов времени t_0, в который точка M занимает крайнее правое положение. Тогда $x(t_0)=A$, $y(t_0)=0$. Начиная с этого момента времени функция $x(t)$ будет попеременно убывать от A до $-A$ на первой половине периода и возрастать от $-A$ до A на второй половине периода. При этом точки максимума функции $x(t)$ — это те моменты времени, когда точка занимает крайнее правое положение; точки минимума соответствуют крайнему левому положению, а нули — верхнему и нижнему положениям.

Аналогичными свойствами обладает и функция $y(t)$; ее точки максимума и минимума соответствуют верхнему и нижнему положениям точки на окружности, а нули — правому и левому положениям.

Отметим, что при $A=1$, $\omega=1$ и $\varphi=0$ функции $x(t)$ и $y(t)$ равны соответственно $\cos t$ и $\sin t$. Проверьте самостоятельно, что известные вам свойства этих функций легко получить, рассматривая соответствующее движение точки по единичной окружности.

Упражнения

100. Пользуясь свойствами тригонометрических функций, замените выражение равным ему значением той же тригонометрической функции *наименьшего положительного аргумента:*

а) $\operatorname{tg}\frac{18\pi}{5}$, $\sin\frac{28\pi}{3}$; б) $\cos\left(-\frac{15\pi}{8}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{5}\right)$;

в) $\sin\left(-\frac{14\pi}{5}\right)$, $\operatorname{tg}\frac{15\pi}{8}$; г) $\cos\frac{20\pi}{7}$, $\operatorname{ctg}\frac{35\pi}{9}$.

101. Найдите область определения и область значений функции:

а) $f(x)=3\cos 2x-1$; б) $f(x)=2-\operatorname{ctg} 3x$;

в) $f(x)=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $f(x)=1+0{,}5\sin\frac{x}{2}$.

102. Найдите промежутки знакопостоянства и нули функции:

а) $f(x)=-\sin 3x$; б) $f(x)=\operatorname{tg}\frac{2x}{3}$;

в) $f(x)=\cos\frac{x}{2}$; г) $f(x)=\operatorname{ctg} 2x$.

103. Найдите промежутки возрастания, убывания, точки максимума и минимума функции:

а) $f(x)=4\cos 3x$; б) $f(x)=0{,}5\operatorname{ctg}\frac{x}{4}$;

в) $f(x)=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $f(x)=0{,}2\sin 4x$.

Исследуйте функцию и постройте ее график (104—105).

104. а) $f(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$; б) $f(x)=-2\sin 2x$;

в) $f(x)=-1{,}5\cos 3x$; г) $f(x)=3\sin\frac{x}{2}$.

105. а) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$; б) $f(x)=-3\cos\frac{3x}{2}$;

в) $f(x)=-2\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$; г) $f(x)=2{,}5\sin\frac{4x}{3}$.

106. Координата движущегося тела (измеренная в сантиметрах) изменяется по указанному закону. Найдите амплитуду, период, частоту колебания. Вычислите координату тела в момент времени t_1, если:

а) $x(t)=3{,}5\cos 4\pi t$, $t_1=\frac{1}{12}$ с;

б) $x(t)=5\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$, $t_1=4{,}5$ с;

в) $x(t)=1{,}5\cos 6\pi t$, $t_1=1\frac{1}{3}$ с;

г) $x(t)=0{,}5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$, $t_1=8$ с.

107. Найдите амплитуду, период, частоту силы тока, если она изменяется по закону (сила тока измерена в амперах, время — в секундах):

а) $I(t)=0{,}25\sin 50\pi t$; б) $I(t)=5\sin 20\pi t$;

в) $I(t)=0{,}5\sin 10\pi t$; г) $I(t)=3\sin 30\pi t$.

108. Найдите амплитуду, период и частоту напряжения, если оно изменяется по закону (напряжение измерено в вольтах, время — в секундах):

а) $U(t)=220\cos 60\pi t$; б) $U(t)=110\cos 30\pi t$;

в) $U(t)=360\cos 20\pi t$; г) $U(t)=180\cos 45\pi t$.

109. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\cos 4$, $\cos 7$, $\cos 9$, $\cos(-12{,}5)$;
б) $\operatorname{tg}(-8)$, $\operatorname{tg} 1{,}3$, $\operatorname{tg} 4$, $\operatorname{tg} 16$;
в) $\sin 6{,}7$, $\sin 10{,}5$, $\sin(-7)$, $\sin 20{,}5$;
г) $\operatorname{ctg} 3{,}5$, $\operatorname{ctg}(-9)$, $\operatorname{ctg} 5$, $\operatorname{ctg} 15$.

110. Найдите область определения функции:

а) $y=\frac{1}{1-\sin x}$; б) $y=\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}$;
в) $y=\frac{1}{\cos x-1}$; г) $y=\sqrt{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}$.

111. Найдите область значений функции:

а) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$; б) $y=\frac{3}{1+\operatorname{tg}^2 x}$;
в) $y=\sqrt{1-\cos 4x}$; г) $y=\frac{2}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$.

Исследуйте функцию и постройте ее график (112—113).

112. а) $f(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;
в) $f(x)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; г) $f(x)=1{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

113. а) $f(x)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;
в) $f(x)=4\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$; г) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-3x\right)$.

114. По графику, изображенному на рисунке 64, определите ам-

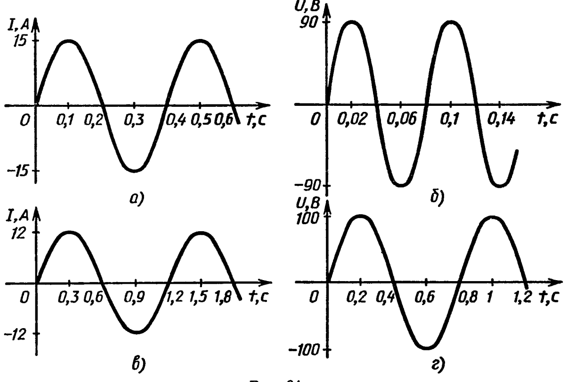


Рис. 64

плитуду силы тока (или напряжения), период колебания. Запишите закон зависимости силы тока (или напряжения) от времени.

115. В какой ближайший момент времени t ($t>0$), считая от начала движения, смещение точки, совершающей гармонические колебания по закону $x(t)=5\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$:

а) максимально; б) равно 2,5;

в) равно 0; г) равно —5?

§ 3. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

8. Арксинус, арккосинус и арктангенс

1. Теорема о корне. Сформулируем важное утверждение, которым удобно пользоваться при решении уравнений.

Теорема *(о корне)*. ***Пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке I, число a — любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=a$ имеет единственный корень в промежутке I.***

Доказательство. Рассмотрим возрастающую функцию f (в случае убывающей функции рассуждения аналогичны). По условию в промежутке I существует такое число b, что $f(b)=a$. Покажем, что b — единственный корень уравнения $f(x)=a$.

Допустим, что на промежутке I есть еще число $c\neq b$, такое, что $f(c)=a$. Тогда или $c<b$, или $c>b$. Но функция f возрастает на промежутке I, поэтому соответственно либо $f(c)<f(b)$, либо $f(c)>f(b)$. Это противоречит равенству $f(c)=f(b)=a$. Следовательно, сделанное предположение неверно и в промежутке I, кроме числа b, других корней уравнения $f(x)=a$ нет.

○ Пример 1. Решим уравнение $x^3+x=2$.

Функция $f(x)=x^3+x$ возрастает на $\boldsymbol{R}$ (это сумма двух возрастающих функций). Поэтому уравнение $f(x)=2$ имеет не более одного корня. Легко видеть, что корнем является $x=1$. ●

2. Арксинус. Как вы знаете, функция синус возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ и принимает все значения от -1 до 1. Следовательно, по теореме о корне для любого числа a, такого, что $|a|\leqslant 1$, в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ существует единственный корень b уравнения $\sin x=a$. Это число b называют арксинусом числа a и обозначают $\arcsin a$ (рис. 65).

Определение. ***Арксинусом*** **числа a называется такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.**

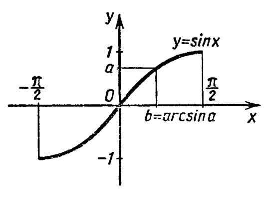


Рис. 65

Рис. 66

○ Пример 2. Найдем $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, так как $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Пример 3. Найдем $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Число $\left(\text{из промежутка}\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$, синус которого есть $-\frac{1}{2}$, равно $-\frac{\pi}{6}$. Поэтому $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$. ●

3. Арккосинус. Функция косинус убывает на отрезке $[0;\ \pi]$ и принимает все значения от -1 до 1. Поэтому для любого числа a, такого, что $|a|\leqslant 1$, на отрезке $[0;\ \pi]$ существует единственный корень b уравнения $\cos x=a$. Это число b называют арккосинусом числа a и обозначают $\arccos a$ (рис. 66).

Определение. ***Арккосинусом* числа *a* называется такое число из отрезка $[0;\ \pi]$, косинус которого равен *a*.**

○ Пример 4. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, так как $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{6}\in[0;\ \pi]$.

Пример 5. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$, так как $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\pi}{4}\in[0;\ \pi]$. ●

4. Арктангенс. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ функция тангенс возрастает и принимает все значения из R. Поэтому для любого числа a на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ существует единственный корень b уравнения $\operatorname{tg} x=a$. Это число b называют арктангенсом числа a и обозначают $\operatorname{arctg} a$ (рис. 67).

Определение. ***Арктангенсом* числа *a* называется такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен *a*.**



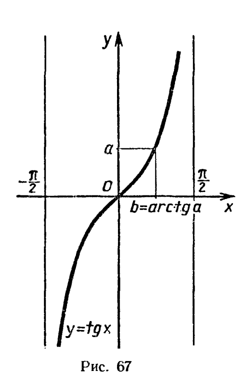


Рис. 67

Рис. 68

○ Пример 6. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Пример 7. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ и $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. ●

5. Арккотангенс. Функция котангенс на интервале $(0; \pi)$ убывает и принимает все значения из $\mathbf{R}$. Поэтому для любого числа a в интервале $(0; \pi)$ существует единственный корень b уравнения $\operatorname{ctg} x = a$. Это число b называют арккотангенсом числа a и обозначают $\operatorname{arcctg} a$ (рис. 68).

Определение. ***Арккотангенсом*** **числа a называется такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.**

○ Пример 8. $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{\pi}{3} \in (0; \pi)$.

Пример 9. $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$, так как $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ и $\frac{5\pi}{6} \in (0; \pi)$. ●

Упражнения

Сколько корней, принадлежащих данному промежутку, имеет каждое из уравнений (116—117)?

116. а) $x^7 = 3$, $x \in (-\infty; \infty)$; б) $\frac{3}{x-1} = -5$, $x \in (-\infty; 1)$;

в) $x^6=4$, $x\in(-\infty;\ 0]$; г) $\frac{5}{x+2}=2$, $x\in(-2;\ \infty)$.

117. а) $(x-3)^3=-4$, $x\in(-\infty;\ \infty)$; б) $2\sin x=1{,}5$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$

в) $(x+2)^4=5$, $x\in[-2;\ \infty)$; г) $0{,}5\cos x=-\frac{1}{4}$, $x\in[0;\ \pi]$.

Отметьте на единичной окружности точки P_t, для которых соответствующее значение t удовлетворяет данному равенству. Найдите значение t, принадлежащее указанному промежутку (118—120).

118. а) $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\sin t=-\frac{1}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; г) $\sin t=1$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

119. а) $\cos t=-\frac{1}{2}$, $[0;\ \pi]$; б) $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[0;\ \pi]$;

в) $\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0;\ \pi]$; г) $\cos t=0$, $[0;\ \pi]$.

120. а) $\operatorname{tg} t=-1$, $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\operatorname{ctg} t=\sqrt{3}$, $(0;\ \pi)$;

в) $\operatorname{tg} t=\sqrt{3}$, $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg} t=-1$, $(0;\ \pi)$.

Вычислите (121—123).

121. а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

в) $\arcsin 1$; г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

122. а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $\arccos 1$.

123. а) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; б) $\operatorname{arctg}(-1)$;

в) $\operatorname{arctg} 0$; г) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

Имеют ли смысл выражения (124—125)?

124. а) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$; б) $\arccos\sqrt{5}$;

в) $\arcsin 1{,}5$; г) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

125. а) $\arccos\pi$; б) $\arcsin(3-\sqrt{20})$;

в) $\arccos(-\sqrt{3})$; г) $\arcsin\frac{2}{7}$.

Найдите значения выражений (126—128).

126. а) $\arcsin 0+\arccos 0$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{1}{2}$;

в) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arcsin(-1)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$

127. а) $\arccos(-0,5)+\arcsin(-0,5)$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arcsin(-1)$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

128. а) $\operatorname{arctg} 1-\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; б) $\operatorname{arctg} 1-\operatorname{arctg}(-1)$;

в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\operatorname{arctg} 0$; г) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

129. Сравните числа:

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\operatorname{arctg}(-1)$;

в) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ и $\arcsin 1$; г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\arcsin\frac{1}{2}$.

---

130. С помощью калькулятора или таблиц найдите значение выражения:

а) $\arcsin 0,3010$; $\operatorname{arctg} 2,3$; б) $\arccos 0,6081$; $\operatorname{arctg} 0,3541$;
в) $\arcsin 0,7801$; $\arccos 0,8771$; г) $\operatorname{arctg} 10$; $\arcsin 0,4303$.

131. Вычислите:

а) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}(-1)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $3\arcsin\frac{1}{2}+4\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$;

в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1$;

г) $\arcsin(-1)-\frac{3}{2}\arccos\frac{1}{2}+3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

132. Докажите, что для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка $[-1; 1]$ из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство:

а) $\arcsin x_1<\arcsin x_2$; б) $\arccos x_1>\arccos x_2$.

133. Докажите, что для любых чисел x_1 и x_2 из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство:

а) $\operatorname{arctg} x_1<\operatorname{arctg} x_2$; б) $\operatorname{arcctg} x_1>\operatorname{arcctg} x_2$.

Расположите числа в порядке возрастания (134—135)

134. а) $\arcsin\frac{\pi}{6}$, $\arcsin(-0{,}3)$, $\arcsin 0{,}9$;

б) $\arcsin(-0{,}5)$, $\arcsin(-0{,}7)$, $\arcsin\frac{\pi}{8}$;

в) $\arccos 0{,}4$, $\arccos(-0{,}2)$, $\arccos(-0{,}8)$;

г) $\arccos 0{,}9$, $\arccos(-0{,}6)$, $\arccos\frac{\pi}{5}$.

135. а) $\operatorname{arctg} 100$, $\operatorname{arctg}(-5)$, $\operatorname{arctg} 0{,}7$;

б) $\operatorname{arcctg} 1{,}2$, $\operatorname{arcctg}\pi$, $\operatorname{arcctg}(-5)$;

в) $\operatorname{arctg}(-95)$, $\operatorname{arctg} 3{,}4$, $\operatorname{arctg} 17$;

г) $\operatorname{arcctg}(-7)$, $\operatorname{arcctg}(-2{,}5)$, $\operatorname{arcctg} 1{,}4$.

9. Решение простейших тригонометрических уравнений

1. Уравнение $\cos t=a$. Очевидно, что если $|a|>1$, то уравнение

$$\cos t=a \qquad (1)$$

не имеет решений, поскольку $|\cos t|\leqslant 1$ для любого t.

Пусть $|a|\leqslant 1$. Надо найти все такие числа t, что $\cos t=a$. На отрезке $[0;\pi]$ существует в точности одно решение уравнения (1) — это число $\arccos a$.

Косинус — четная функция, и, значит, на отрезке $[-\pi; 0]$ уравнение (1) также имеет в точности одно решение — число $-\arccos a$. Итак, уравнение $\cos t=a$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ длиной 2π имеет два решения: $t=\pm\arccos a$ (совпадающие при $a=1$).

Вследствие периодичности функции cos все остальные решения отличаются от этих на $2\pi n$ $(n\in Z)$, т. е. формула корней уравнения (1) такова:

$$t=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z. \qquad (2)$$

(Обратите внимание: этой формулой можно пользоваться только при $|a|\leqslant 1$.)

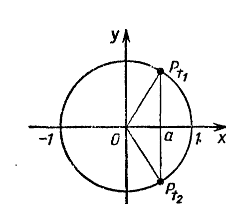
Решение уравнения (1) можно проиллюстрировать на единичной окружности. По определению $\cos t$ — это абсцисса точки P_t единичной окружности. Если $|a|<1$, то таких точек две (рис. 69, *а*); если же $a=1$ или $a=-1$, то одна (рис. 69, *б*).

При $a=1$ числа $\arccos a$ и $-\arccos a$ совпадают (они равны нулю), поэтому решения уравнения

$$\cos t=1$$

принято записывать в виде

$$t=2\pi n,\ n\in Z.$$



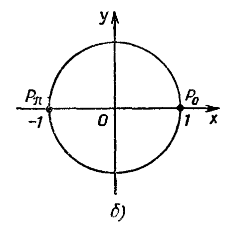


Рис. 69

Особая форма записи решений уравнений (1) принята также для $a=-1$ и $a=0$:

$$\cos t=-1 \text{ при } t=\pi+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z};$$

$$\cos t=0 \text{ при } t=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

○ Пример 1. Решим уравнение $\cos x=\frac{1}{2}$.

По формуле (2)

$$x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Поскольку $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, приходим к ответу

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Пример 2. Решим уравнение $\cos x=-0{,}2756$.
По формуле (2)

$$x=\pm\arccos(-0{,}2756)+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Значение $\arccos(-0{,}2756)$ находим с помощью калькулятора; оно приближенно равно 1,8500. Итак,

$$x=\pm x_0+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}, \text{ где } x_0\approx 1{,}8500.$$

Пример 3. Решим уравнение $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

По формуле (2)

$2x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, т. е. $2x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{5\pi}{6}+$
$+2\pi n$, откуда

$$x=\frac{\pi}{8}\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$ ●

2. Уравнение $\sin t = a$. Уравнение

$$\sin t = a \qquad (3)$$

не имеет решений при $|a| > 1$, так как $|\sin t| \leqslant 1$ для любого t.

При $|a| \leqslant 1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение (3) имеет в точности одно решение $t_1 = \arcsin a$. На промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция sin убывает и принимает все значения от -1 до 1. По теореме о корне уравнение (3) имеет и на этом отрезке один корень. Из рисунка 70, *а* видно, что этот корень есть число t_2, равное $\pi - \arcsin a$. Действительно, $\sin t_2 = \sin(\pi - t_1) = \sin t_1 = a$. Кроме того, поскольку $-\frac{\pi}{2} \leqslant t_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, имеем $-\frac{\pi}{2} \leqslant -t_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant \pi - t_1 \leqslant \pi + \frac{\pi}{2}$, т. е. число t_2 принадлежит отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Итак, уравнение (3) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ имеет два решения: $t_1 = \arcsin a$ и $t_2 = \pi - \arcsin a$ (совпадающие при $a = 1$). Учитывая, что период синуса равен 2π, получаем такие формулы для записи всех решений уравнения:

$$t = \arcsin a + 2\pi n, \qquad (4)$$

$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \qquad (5)$$

Удобно решения уравнения (3) записывать не двумя, а одной формулой:

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \ k \in \mathbf{Z}. \qquad (6)$$

Нетрудно убедиться, что при четных $k = 2n$ из формулы (6) находим все решения, записанные формулой (4); при нечетных $k = 2n + 1$ — решения, записываемые формулой (5).

Решение уравнения (3) удобно иллюстрировать на единичной окружности. По определению $\sin t$ есть ордината точки P_t единич-

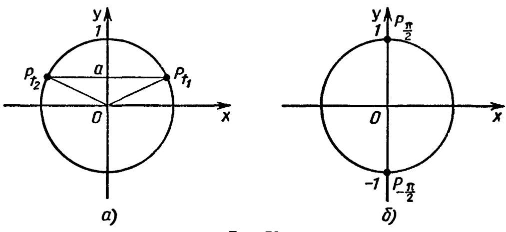


Рис. 70

ной окружности. Если $|a|<1$, то таких точек две (рис. 70, *а*); при $a=\pm 1$ — одна (рис. 70, *б*).

Если $a=1$, то числа $\arcsin a$ и $\pi - \arcsin a$ совпадают, поэтому решение уравнения

$$\sin t = 1$$

принято записывать так:

$$t=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

При $a=-1$ и $a=0$ принята следующая запись решений:

$$\sin t=-1, \text{ если } t=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}..$$

$$\sin t=0, \text{ если } t=\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

○ Пример 4. Решим уравнение $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

По формуле (6)

$$x=(-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}, \text{ т. е.}$$

$$x=(-1)^k \frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Пример 5. Решим уравнение $\sin x=0{,}3714$.

Согласно формуле (6)

$$x=(-1)^n \arcsin 0{,}3714+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

С помощью калькулятора находим $\arcsin 0{,}3714\approx 0{,}3805$.

Пример 6. Решим уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Функция синус нечетна. Поэтому

$$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

По формуле (6)

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Так как $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, имеем:

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k,$$

$$x=\frac{\pi}{5}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$ ●

3. Уравнение $\operatorname{tg} t=a$. При любом a на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ имеется ровно одно такое число t, что $\operatorname{tg} t=a$,— это $\operatorname{arctg} a$. Поэтому уравнение

$$\operatorname{tg} t=a \qquad (7)$$

имеет на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ длиной π единственный корень. Функция тангенс имеет период π. Следовательно, остальные корни уравнения (7) отличаются от найденного на πn ($n \in Z$), т. е.

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi n, \ n \in Z. \qquad (8)$$

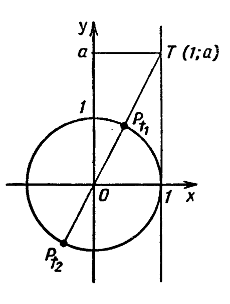


Рис. 71

Решение уравнения $\operatorname{tg} t = a$ удобно проиллюстрировать с помощью линии тангенсов (рис. 71). Напомним, что $\operatorname{tg} t$ — это ордината точки T_t пересечения прямой OP_{t_1} с линией тангенсов (см. п. 1). Для любого числа a на линии тангенсов есть лишь одна точка с ординатой a, это точка $T(1; a)$. Прямая OT пересекается с единичной окружностью в двух точках; при этом интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ соответствует точка P_{t_1} правой полуокружности, такая, что $t_1 = \operatorname{arctg} a$.

○ Пример 7. Решим уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

По формуле (8) находим решение $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n$, $n \in Z$, а так как $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, приходим к окончательному ответу:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in Z.$$

Пример 8. Решим уравнение $\operatorname{tg} x = 5{,}177$.

Из формулы (8) следует, что

$$x = \operatorname{arctg} 5{,}177 + \pi n, \ n \in Z.$$

С помощью калькулятора находим $\operatorname{arctg} 5{,}177 \approx 1{,}3800$.

Пример 9. Решим уравнение $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

Это уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, которое решаем с помощью формулы (8):

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n = -\frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in Z. \ ●$$

Упражнения

Решите уравнения (136—143).

136. а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = -\frac{1}{2}$; в) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x = -1$.

137. а) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$; б) $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$;
в) $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$; г) $2 \cos x - 1 = 0$.

138. а) $\sin x=\frac{1}{2}$; б) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin x=-\frac{1}{2}$; г) $\sin x=-1$

139. а) $\sqrt{2}\sin x+1=0$; б) $2\sin x+\sqrt{3}=0$; в) $2\sin x-1=0$; г) $2\sin x+\sqrt{2}=0$.

140. а) $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x=1$; г) $\operatorname{tg} x=0$.

141. а) $\operatorname{tg} x+\sqrt{3}=0$; б) $\operatorname{ctg} x+1=0$; в) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x-1=0$; г) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x-1=0$.

142. а) $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\frac{x}{3}=-\frac{1}{2}$; в) $\sin\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$; г) $\cos 4x=0$.

143. а) $\sin x=-0{,}6$; б) $\operatorname{ctg} x=2{,}5$; в) $\cos x=0{,}3$; г) $\operatorname{tg} x=-3{,}5$.

Решите уравнения (144—147).

144. а) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\operatorname{tg}(-4x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\cos(-2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right)=1$.

145. а) $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$; б) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=3$; г) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1=0$.

146. а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-1$; б) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=-1$; г) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2}$.

147. а) $\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}=1$; в) $\sin 2x\cos 2x=-\frac{1}{4}$; г) $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

148. Для каждой из функций

$$y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \text{ и } y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

найдите координаты общих точек ее графика с прямой: а) $x=4{,}5\pi$; б) $y=-1$; в) $y=1$; г) $y=0$.

149. Решите уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{1}{2}$, $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ и найдите для каждого из них:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие промежутку $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$.

150. Докажите, что все решения уравнения $\operatorname{ctg} t=a$ находятся по формуле $t=\operatorname{arcctg} a+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

10. Решение простейших тригонометрических неравенств

Решение неравенств, содержащих тригонометрические функции, сводится, как правило, к решению простейших неравенств вида $\sin t\leqslant a$, $\cos t>a$, $\operatorname{tg} t\geqslant a$ и т. п.

Рассмотрим на примерах способы их решения.

○ Пример 1. Решим неравенство $\sin t\geqslant -\frac{1}{2}$.

Все точки P_t единичной окружности при значениях t, удовлетворяющих данному неравенству, имеют ординату, бо́льшую или равную $-\frac{1}{2}$. Множество всех таких точек — дуга l, выделенная на рисунке 72. Найдем условие принадлежности точки P_t этой дуге.

Точка P_{t_1} лежит на правой полуокружности, ордината P_{t_1} равна $-\frac{1}{2}$, и, следовательно, в качестве t_1 удобно взять значение $t_1=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$. Представим себе, что мы совершаем обход дуги l от точки P_{t_1} к P_{t_2} против часовой стрелки. Тогда $t_2>t_1$, и, как легко понять, $t_2=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7\pi}{6}$. Таким образом, получаем, что точка P_t принадлежит дуге l, если $-\frac{\pi}{6}\leqslant t\leqslant\frac{7\pi}{6}$. Итак, решения неравенства, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ длиной 2π, таковы: $-\frac{\pi}{6}\leqslant t\leqslant\frac{7\pi}{6}$. Вследствие периодичности синуса остальные решения получаются добавлением к найденным чисел вида $2\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$. Приходим к ответу:

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi n\leqslant t\leqslant\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

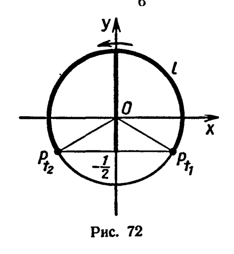


Рис. 72

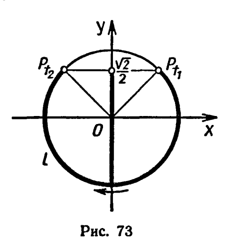


Рис. 73

Пример 2. Решим неравенство $\sin t<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Это неравенство означает, что все точки P_t единичной окружности при значениях t, удовлетворяющих данному неравенству, имеют ординату, меньшую $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Множество всех таких точек — дуга l, выделенная на рисунке 73. Концы ее P_{t_1} и P_{t_2} не входят в рассматриваемое множество, поскольку их ординаты не меньше, а равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Чтобы найти условие, при котором точка P_t принадлежит указанному множеству, найдем t_1 и t_2. Возьмем $t_1=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

Рассмотрим обход дуги l от точки P_{t_1} к P_{t_2} в направлении по часовой стрелке; $t_2<t_1$, и $t_2=-\pi-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{5\pi}{4}$. Все решения неравенства из промежутка $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ длиной 2π таковы: $-\frac{5\pi}{4}<t<\frac{\pi}{4}$. Учитывая периодичность синуса, получаем все решения неравенства:

$$-\frac{5\pi}{4}+2\pi n<t<\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Пример 3. Решим неравенство $\cos t<\frac{1}{2}$.

Множество точек единичной окружности, абсциссы которых меньше $\frac{1}{2}$, лежат левее прямой $x=\frac{1}{2}$. Значит, множество всех таких точек есть дуга l, выделенная на рисунке 74 (концы ее P_{t_1} и P_{t_2} не входят в это множество). Находим t_1 и t_2. Точка P_{t_1} расположена на верхней полуокружности, абсцисса P_{t_1} равна $\frac{1}{2}$, следовательно, $t_1=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$. При переходе от точки P_{t_1} к P_{t_2} по дуге l выполняем обход против движения часовой стрелки, тогда $t_2>t_1$ и $t_2=2\pi-\arccos\frac{1}{2}=\frac{5\pi}{3}$. Точка принадлежит выделенной дуге l (исключая ее концы) при условии, что $\frac{\pi}{3}<t<\frac{5\pi}{3}$. Решения неравенства, принадлежащие промежутку $[0;\ 2\pi]$ длиной 2π, таковы: $\frac{\pi}{3}<t<\frac{5\pi}{3}$. Вследствие периодичности косинуса остальные решения получаются добавлением к найденным чисел вида $2\pi n$, где $n\in \mathbf{Z}$. Приходим к окончательному ответу:

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n<t<\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

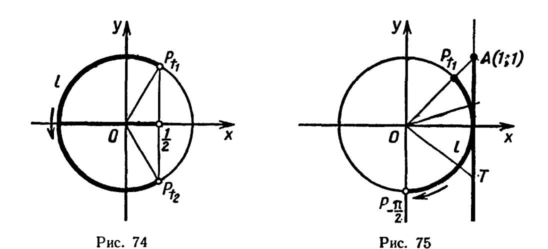


Рис. 74 Рис. 75

Пример 4. Решим неравенство $\operatorname{tg} t \leqslant 1$.

Период тангенса равен π. Поэтому найдем сначала все решения данного неравенства, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а затем воспользуемся периодичностью тангенса. Для выделения всех точек P_t правой полуокружности, значения t которых удовлетворяют данному неравенству, обратимся к линии тангенсов. Если t является решением неравенства, то ордината точки T, равная $\operatorname{tg} t$, должна быть меньше или равна 1. Множество таких точек T — луч AT (рис. 75). Множество точек P_t, соответствующих точкам этого луча,— дуга l, выделенная на рисунке (обратите внимание: точка P_{t_1} принадлежит, а $P_{-\frac{\pi}{2}}$ не принадлежит рассматриваемому множеству). Находим условие, при котором точка P_t принадлежит дуге l. $t_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, и $\operatorname{tg} t_1 = 1$, следовательно, $t_1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Значит, t должно удовлетворять условию $-\frac{\pi}{2} < t \leqslant \frac{\pi}{4}$. Все решения данного неравенства, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, таковы: $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$. Учитывая периодичность тангенса, получаем ответ:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < t \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 5. Решим неравенство $\cos 2x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Обозначив $2x$ через t, получим $\cos t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$. На рисунке 76 выделена соответствующая дуга l. Находим $t_1 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, $t_2 = -\frac{3\pi}{4}$, откуда

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

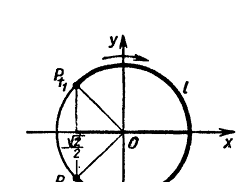


Рис. 76

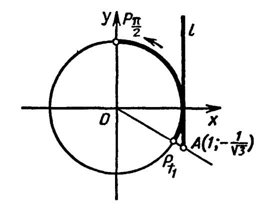


Рис. 77

Переходя к переменной x, получаем:

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\leqslant 2x\leqslant\frac{3\pi}{4}+2\pi n,$$

$$-\frac{3\pi}{8}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Пример 6. Решим неравенство $3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)<\sqrt{3}$.

Преобразовав данное неравенство, получим:

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)<\frac{\sqrt{3}}{3}$, $-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)>-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Обозначим $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}$ через t, тогда $\operatorname{tg} t>-\frac{\sqrt{3}}{3}$. На рисунке 77 выделена соответствующая дуга l. Так как $t_1=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$, получаем $-\frac{\pi}{6}+\pi n<t<\frac{\pi}{2}+\pi n$. Перейдем к переменной x:

$$-\frac{\pi}{6}+\pi n<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+\pi n,$$

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\ \bullet$$

Упражнения

На единичной окружности отметьте точки P_t, для которых соответствующие значения t удовлетворяют данному неравенству. Найдите множество значений t, удовлетворяющих неравенству и принадлежащих указанному промежутку (151—153).

151. а) $\sin t>\frac{1}{2}$, $t\in[0;\ \pi]$; б) $\sin t\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t\in[-\pi;\ 0]$;

в) $\sin t>\frac{\sqrt{2}}{2}$, $t\in[0;\ \pi]$; г) $\sin t<-\frac{1}{2}$, $t\in[-\pi;\ 0]$.

152. а) $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\cos t < -\frac{1}{2}$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

в) $\cos t > \frac{1}{2}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; г) $\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

153. а) $\operatorname{tg} t > -\sqrt{3}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\operatorname{tg} t < \frac{1}{\sqrt{3}}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $\operatorname{tg} t > \frac{\sqrt{3}}{3}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\operatorname{tg} t < -1$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решите неравенства (154—157).

154. а) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$; г) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

155. а) $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$; б) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

156. а) $\operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\operatorname{tg} x \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{tg} x < -1$.

157. а) $2\cos x - 1 \geqslant 0$; б) $2\sin x + \sqrt{2} \geqslant 0$;

в) $2\cos x - \sqrt{3} \leqslant 0$; г) $3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} \geqslant 0$.

Решите неравенства (158—163).

158. а) $\sin 2x < \frac{1}{2}$; б) $\cos \frac{x}{3} > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin \frac{x}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{tg} 5x > 1$.

159. а) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 1$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 1$;

в) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \geqslant 1$; г) $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$.

160. а) $\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{1}{2}$;

б) $\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $4\sin 2x \cos 2x \geqslant \sqrt{2}$;

г) $\cos \frac{\pi}{8} \cos x - \sin x \sin \frac{\pi}{8} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

161. а) $\operatorname{ctg} x \geqslant \sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) > 1$;

в) $\operatorname{ctg} 3x \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $3 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right) > -\sqrt{3}$.

162. а) $3 \sin \frac{x}{4} \geqslant 2$; б) $4 \cos \frac{x}{3} < -3$;

в) $5 \operatorname{tg} 2x \leqslant 3$; г) $0{,}5 \sin 4x < -0{,}2$.

163. Найдите решения неравенства, принадлежащие указанному промежутку:

а) $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right)$; б) $\cos \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$;

в) $\operatorname{tg} x \geqslant -1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$; г) $\sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [0; \pi]$.

11. Примеры решения тригонометрических уравнений и систем уравнений

В п. 9 было показано, как решать простейшие тригонометрические уравнения. Решение более сложных тригонометрических уравнений требует знания формул тригонометрии. Рассмотрим некоторые примеры.

○ Пример 1. Решим уравнение $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Введем новую переменную $y = \sin x$. Тогда данное уравнение можно записать в виде $2y^2 + y - 1 = 0$. Мы получили квадратное уравнение. Его корнями служат $y_1 = \frac{1}{2}$ и $y_2 = -1$. Следовательно, $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = -1$. В первом случае получим решения

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, \text{ т. е. } x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Во втором случае имеем:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2. Решим уравнение $6 \sin^2 x + 5 \cos x - 2 = 0$.

Заменяя $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, получим относительно $\cos x$ квадратное уравнение $6(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x - 2 = 0$, откуда $-6 \cos^2 x + 5 \cos x + 4 = 0$, т. е. $6 \cos^2 x - 5 \cos x - 4 = 0$. Как и в примере 1, введем новую переменную $\cos x = y$. Тогда $6y^2 - 5y - 4 = 0$, откуда $y = -\frac{1}{2}$ или $y = 1\frac{1}{3}$. Уравнение $\cos x = 1\frac{1}{3}$ не имеет решений, так как $1\frac{1}{3} > 1$. Решая уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$, находим:

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 3. Решим уравнение $\operatorname{tg} x+2 \operatorname{ctg} x=3$.

Обозначим $\operatorname{tg} x$ через y. Поскольку $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, получаем уравнение $y+\frac{2}{y}=3$, которое приводится к квадратному $y^2-3y+2=0$ (при условии $y \neq 0$). Его корни $y=2$ и $y=1$.

1) $\operatorname{tg} x=2$, $x=\operatorname{arctg} 2+\pi k$, т. е. $x=x_0+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, где $x_0=$ $=\operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}1072$.

2) $\operatorname{tg} x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 4. Решим уравнение $3 \sin^2 x-4 \sin x \cos x+$ $+\cos^2 x=0$.

Значения x, при которых $\cos x=0$, не являются решениями этого уравнения, так как если $\cos x=0$, то должно выполняться равенство $3 \sin^2 x=0$, а косинус и синус не могут быть одновременно равными нулю. Поэтому можно обе части уравнения разделить на $\cos^2 x$ (или на $\sin^2 x$) и при этом получить уравнение, равносильное данному уравнению $3 \operatorname{tg}^2 x-4 \operatorname{tg} x+1=0$, откуда $\operatorname{tg} x=1$ или $\operatorname{tg} x=\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \text{ или } x=\operatorname{arctg} \frac{1}{3}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 5. Решим уравнение $6 \sin^2 x+4 \sin x \cos x=1$.

Заменим 1 в правой части уравнения на $\sin^2 x+\cos^2 x$. После выполнения соответствующих преобразований получаем $5 \sin^2 x+4 \sin x \cos x-\cos^2 x=0$. Воспользуемся приемом решения подобного уравнения, который описан в примере 4. В результате имеем $\operatorname{tg} x=\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} x=-1$. Следовательно,

$$x=\operatorname{arctg} \frac{1}{5}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \text{ или } x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 6. Уравнение $\sin^2 x-\sin 2x=0$ после замены $\sin 2x$ на $2 \sin x \cos x$ приводится к виду $\sin^2 x-2 \sin x \cos x=0$.

Разложим левую часть на множители: $\sin x(\sin x-2 \cos x)=0$, откуда $\sin x=0$, т. е. $x=\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, или $\sin x-2 \cos x=0$, откуда $\operatorname{tg} x=2$ и $x=\operatorname{arctg} 2+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, т. е. $x=x_0+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, где $x_0=$ $=\operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}1072$.

Как и в примере 4, можно было разделить обе части уравнения на $\cos^2 x$ и получить уравнение $\operatorname{tg}^2 x-2 \operatorname{tg} x=0$. Если же делить на $\sin^2 x$, то нужно учесть, что те x, при которых $\sin x=0$,— решения данного уравнения. Поэтому к корням полученного после деления на $\sin^2 x$ уравнения $\operatorname{ctg} x-\frac{1}{2}=0$ надо добавить корни уравнения $\sin x=0$. ●

Многие другие уравнения, например уравнение $\sin^2 x-$ $-\sin x \cos x+\cos^2 x=0$ или уравнение $\sin^3 x+2 \sin^2 x \cos x-$ $-5 \sin x \cos^2 x+2 \cos^3 x=0$ и т. п., также решаются делением

левой и правой частей уравнения на косинус (или синус) в степени, равной степени уравнения. Предварительно надо проверить, являются ли значения x, для которых $\cos x=0$ ($\sin x=0$ при делении на $\sin^n x$), решениями данного уравнения. Так, уравнения второй степени делят на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$), а третьей — на $\cos^3 x$ (или $\sin^3 x$) и заменой $\operatorname{tg} x$ (или $\operatorname{ctg} x$) на y получают алгебраическое уравнение.

○ Пример 7. Решим уравнение $\cos 6x+\cos 2x=0$.

Преобразовав сумму косинусов в произведение, получим $2\cos 4x \cos 2x=0$. Это уравнение обращается в верное равенство, если $\cos 4x=0$ или $\cos 2x=0$, т. е.

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4},\ k\in \mathbf{Z},\ \text{или}\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in \mathbf{Z}.$$

Пример 8. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x-y=\frac{5\pi}{3}, \\ \sin x=2\sin y. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $y=x-\frac{5\pi}{3}$. Тогда $2\sin y= =2\sin\left(x-\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\sin x\cos\frac{5\pi}{3}-\cos x\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+ +\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$. Второе уравнение системы примет вид $\sin x=\sin x+\sqrt{3}\cos x$, откуда $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, где $n\in \mathbf{Z}$. Далее находим $y=x-\frac{5\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi n-\frac{5\pi}{3}=\pi n-\frac{7\pi}{6}$, $n\in \mathbf{Z}$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n-\frac{7\pi}{6}\right)$, $n\in \mathbf{Z}$. ●

Упражнения

Решите уравнения (164—168).

164. а) $2\sin^2 x+\sin x-1=0$; б) $3\sin^2 x-5\sin x-2=0$;
в) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; г) $4\sin^2 x+11\sin x-3=0$.

165. а) $6\cos^2 x+\cos x-1=0$; б) $2\sin^2 x+3\cos x=0$;
в) $4\cos^2 x-8\cos x+3=0$; г) $5\sin^2 x+6\cos x-6=0$.

166. а) $2\cos^2 x+\sin x+1=0$; б) $\cos^2 x+3\sin x=3$;
в) $4\cos x=4-\sin^2 x$; г) $8\sin^2 x+\cos x+1=0$.

167. а) $3\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-1=0$; б) $\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x+1=0$;
в) $2\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-2=0$; г) $2\operatorname{ctg} x-3\operatorname{tg} x+5=0$.

168. а) $2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x=0$; б) $4\cos^2 x-3=0$;
в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x=0$; г) $4\sin^2 x-1=0$.

Решите уравнения (169—174).

169. а) $3\sin^2 x+\sin x\cos x=2\cos^2 x$;

б) $2\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sin^2 x=0$;

в) $9\sin x\cos x-7\cos^2 x=2\sin^2 x$;

г) $2\sin^2 x-\sin x\cos x=\cos^2 x$.

170. а) $4\sin^2 x-\sin 2x=3$; б) $\cos 2x=2\cos x-1$;

в) $\sin 2x-\cos x=0$; г) $\sin 2x+4\cos^2 x=1$.

171. а) $2\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\operatorname{ctg} x=2$;

в) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$; г) $\operatorname{tg} x=3\operatorname{ctg} x$.

172. а) $\sin 2x+2\cos 2x=1$; б) $\sin^4 \frac{x}{4}-\cos^4 \frac{x}{4}=\frac{1}{2}$;

в) $3\sin 2x+\cos 2x=2\cos^2 x$; г) $1-\cos x=2\sin \frac{x}{2}$.

173. а) $\sin 4x+\sin^2 2x=0$; б) $\frac{3}{5\operatorname{tg} x+8}=1$;

в) $\frac{5}{3\sin x+4}=2$; г) $1-\sin 2x=\left(\cos \frac{x}{2}-\sin \frac{x}{2}\right)^2$.

174. а) $\cos 5x-\cos 3x=0$; б) $\sin 7x-\sin x=\cos 4x$;

в) $\sin 5x-\sin x=0$; г) $\cos 3x+\cos x=4\cos 2x$.

Решите системы уравнений (175—176).

175. а) $\begin{cases} x+y=\pi, \\ \cos x-\cos y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{2}, \\ \cos^2 x+\sin^2 y=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=\pi, \\ \sin x+\sin y=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}, \\ \sin^2 x-\sin^2 y=1. \end{cases}$

176. а) $\begin{cases} \sin x-\cos y=0, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\frac{1}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x+\cos y=1, \\ \sin^2 x-\cos^2 y=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{6}, \\ \sin x\cos y=\frac{1}{2}. \end{cases}$

Сведения из истории

1. О происхождении единиц измерения углов. Градусное измерение углов возникло в Древнем Вавилоне задолго до новой эры. Жрецы считали, что свой дневной путь Солнце совершает за 180 «шагов», и, значит, один «шаг» равен $\frac{1}{180}$ развернутого угла. В Вавилоне была принята шестидесятеричная система счисления, т. е. фактически числа записывались в виде суммы степеней числа

60, а не 10, как это принято в нашей десятеричной системе. Естественно поэтому, что для введения более мелких единиц измерения углов один «шаг» последовательно делился на 60 частей.

Вавилонская система измерения углов оказалась достаточно удобной, и ее сохранили математики Греции и Рима. Термины, которыми мы пользуемся для названия угловых величин, имеют латинские корни. Слово «градус» происходит от латинского gradus (шаг, ступень). В переводе с латинского minutus означает «уменьшенный». Наконец, secunda переводится как «вторая». Имеется в виду следующее: деление градуса на 60 частей, т. е. минуты,— это первое деление; деление минуты на 60 секунд — второе деление градуса. Малоупотребительное название $\frac{1}{60}$ секунды — терцина, латинское tercina означает «третье» (деление градуса).

Принятая сейчас система обозначения величин углов получила широкое распространение на рубеже XVI и XVII вв.; ею уже пользовались такие известные астрономы, как Н. Коперник и Т. Браге. Но еще К. Птолемей (II в. н. э.) количество градусов (которые он называл также просто частями) обозначал кружком, число минут — штрихом, а секунд — двумя штрихами.

Другая единица измерения углов — *радиан* — введена совсем недавно. Первое издание (это были экзаменационные билеты), содержащее термин «радиан», появилось в 1873 г. в Англии. Сначала в обозначениях указывалось, что имеется в виду именно радианная мера (например, $\frac{\pi^R}{2}$ — угол в $\frac{\pi}{2}$ радиан), но вскоре индекс R (или r) стали опускать. Сам термин «радиан» происходит от латинского radius (спица, луч). Если вспомнить определение угла в один радиан (центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности), то выбор корня «рад» для названия такого угла представляется совершенно естественным.

2. Об истории тригонометрии. Слово «тригонометрия» впервые встречается (1505 г.) в заглавии книги немецкого теолога и математика Питискуса. Происхождение этого слова греческое: τρίγωνον — треугольник, μετρεω — мера. Иными словами, тригонометрия — наука об измерении треугольников. Хотя название возникло сравнительно недавно, многие относимые сейчас к тригонометрии понятия и факты были известны уже две тысячи лет назад.

Длительную историю имеет понятие синуса. Фактически различные отношения отрезков треугольника и окружности (а по существу, и тригонометрические функции) встречаются уже в III в. до н. э. в работах великих математиков Древней Греции — Евклида, Архимеда, Аполлония Пергского. В римский период эти отношения уже достаточно систематично исследовались Менелаем (I в. н. э.), хотя и не приобрели специального названия. Современный синус угла α, например, изучался как полухорда, на которую опирается центральный угол

величиной α, или как хорда удвоенной дуги (рис. 78).

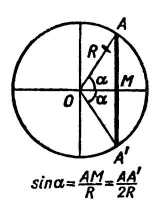


Рис. 78

В последующий период математика долгое время наиболее активно развивалась индийскими и арабскими учеными. В IV—V вв. появился, в частности, уже специальный термин в трудах по астрономии великого индийского ученого Ариабхаты (476 — ок. 550), именем которого назван первый индийский спутник Земли. Отрезок AM (рис. 78) он назвал *ардхаджива* (*ардха* — половина, *джива* — тетива лука, которую напоминает хорда). Позднее привилось более краткое название *джива*. Арабскими математиками в IX в. слово *джива* (или *джиба*) было заменено на арабское слово *джайб* (выпуклость). При переводе арабских математических текстов в XII в. это слово было заменено латинским *синус* (sinus — изгиб, кривизна).

Слово *косинус* намного моложе. Косинус — это сокращение латинского выражения complementy sinus, т. е. «дополнительный синус» (или иначе «синус дополнительной дуги»; вспомните $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$).

Имея дело с тригонометрическими функциями, мы существенно выходим за рамки задачи «измерения треугольников». Поэтому известный математик Ф. Клейн (1849—1925) предлагал учение о «тригонометрических» функциях называть иначе — *гониометрией* (латинское gonio означает «угол»). Однако это название не привилось.

Тангенсы возникли в связи с решением задачи об определении длины тени. *Тангенс* (а также *котангенс, секанс* и *косеканс*) введен в X в. арабским математиком Абу-л-Вафой, который составил и первые таблицы для нахождения тангенсов и котангенсов. Однако эти открытия долгое время оставались неизвестными европейским ученым, и тангенсы были заново открыты в XIV в. сначала английским ученым Т. Бравердином, а позднее немецким математиком, астрономом Региомонтаном (1467 г.). Название «тангенс», происходящее от латинского tanger (касаться), появилось в 1583 г. Tangens переводится как «касающийся» (вспомните: линия тангенсов — это касательная к единичной окружности).

Современные обозначения arcsin и arctg появляются в 1772 г. в работах венского математика Шерфера и известного французского ученого Ж. Л. Лагранжа, хотя несколько ранее их уже рассматривал Д. Бернулли, который употреблял иную символику. Но общепринятыми эти символы стали лишь в конце XVIII столетия. Приставка «арк» происходит от латинского arcus (лук, дуга), что вполне согласуется со смыслом понятия: $\arcsin x$, например,— это угол (а можно сказать, и дуга), синус которого равен x.

Длительное время тригонометрия развивалась как часть геометрии, т. е. факты, которые мы сейчас формулируем в терминах тригонометрических функций, формулировались и доказывались с помощью геометрических понятий и утверждений. Пожалуй, наибольшие стимулы к развитию тригонометрии возникали в связи с решением задач астрономии, что представляло большой практический интерес (например, для решения задач определения местонахождения судна, предсказания затмений и т. д.). Астрономов интересовали соотношения между сторонами и углами сферических треугольников, составленных из больших кругов, лежащих на сфере. И надо заметить, что математики древности удачно справлялись с задачами, существенно более трудными (почитайте книги о сферической геометрии), нежели задачи на решение плоских треугольников, которыми вы занимались в IX классе.

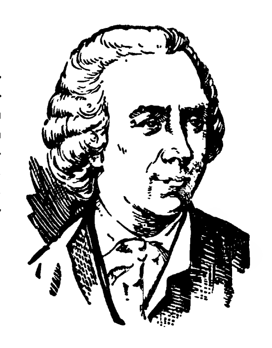
Во всяком случае в геометрической форме многие известные вам формулы тригонометрии открывались и переоткрывались древнегреческими, индийскими, арабскими математиками. (Правда, формулы разности тригонометрических функций стали известны только в XVII в.— их вывел английский математик Непер для упрощения вычислений с тригонометрическими функциями. А первый рисунок синусоиды появился в 1634 г.)

Принципиальное значение имело составление К. Птолемеем первой таблицы синусов (долгое время она называлась таблицей хорд): появилось практическое средство решения ряда прикладных задач, и в первую очередь задач астрономии.

Имея дело с готовыми таблицами или пользуясь калькулятором, мы часто не задумываемся о том, что было время, когда таблицы еще не были изобретены. Для того чтобы составить их, требовалось не только выполнить большой объем вычислений, но и придумать способ составления таблиц. Таблицы Птолемея точны до пяти десятичных знаков включительно.

Современный вид тригонометрии придал крупнейший математик XVIII столетия Л. Эйлер (1707—1783), швейцарец по происхождению, долгие годы работавший в России и являвшийся членом Петербургской академии наук. Именно Эйлер первым ввел известные определения тригонометрических функций, стал рассматривать функции произвольного угла, получил формулы приведения. Все это малая доля того, что за долгую жизнь Эйлер успел сделать в математике: он оставил свыше 800 работ, доказал многие ставшие классическими теоремы, относящиеся к самым разным областям математики. (Несмотря на то что в 1776 г. Эйлер потерял зрение, он до последних дней продолжал диктовать все новые и новые работы.) Но если вы попытались оперировать с тригонометрическими функциями в геометрической форме, т. е. так, как это делали многие поколения математиков до Эйлера, то сумеете оценить заслуги Эйлера в систематизации тригонометрии. После Эйлера тригонометрия приобрела форму исчисления: различные факты стали доказываться путем формального приме-

Эйлер Леонард (1707—1783) — крупнейший математик XVIII столетия. Родился в Швейцарии. Долгие годы жил и работал в России, член Петербургской академии наук. Громадное научное наследие Эйлера включает блестящие результаты, относящиеся к математическому анализу, геометрии, теории чисел, вариационному исчислению, механике и другим приложениям математики.



нения формул тригонометрии, доказательства стали намного компактнее, проще.

3. Из истории понятия функции. Понятие функции, с которым вы знакомы с VII класса, возникло в математике сравнительно недавно. Для того чтобы прийти к пониманию целесообразности его введения и получить первые достаточно четкие определения, потребовались усилия первоклассных математиков нескольких поколений. Революционные изменения в математике, происшедшие в XVII столетии, вызваны работами многих ученых, представляющих различные страны и народы. Но в первую очередь следует назвать имена П. Ферма (1601—1665), Р. Декарта (1596—1650), И. Ньютона (1643—1727), Г. В. Лейбница (1646—1716).

Необходимые предпосылки к возникновению понятия функции были созданы в 30-х годах XVII в., когда возникла *аналитическая геометрия*, характеризующаяся, в отличие от классических методов геометров Древней Греции, активным привлечением алгебры к решению геометрических задач. (Решая задачи по геометрии координатным методом, вы, по существу, пользуетесь методами аналитической геометрии.) Практически одновременно (и независимо друг от друга) французские математики П. Ферма и Р. Декарт заметили, что введение системы координат на плоскости и задания фигур их уравнениями позволяют свести многие задачи геометрии к исследованию уравнений геометрических фигур. В честь Декарта, давшего развернутое изложение нового метода в книгах «Геометрия» и «Рассуждение о методе», прямоугольная система координат позднее была названа *декартовой*. Существенно заметить, что одновременно формировалась и алгебра, создавалось *«буквенное исчисление»*, то самое, с помощью которо-



Декарт Рене

(1596—1650) —

великий французский философ, математик. Один из создателей аналитической геометрии. Ввел понятие переменной величины. Его идеи нашли многочисленных последователей — «картезианцев» (латинизированное имя Декарта — Картезий). Главные работы — «Геометрия», «Рассуждение о методе».

го вы сейчас преобразовываете алгебраические выражения, решаете уравнения, текстовые задачи и т. д.

Великий английский ученый, математик и физик И. Ньютон, исследуя зависимости координат движущейся точки от времени, фактически уже занимался исследованием функций. Хотя не он ввел это понятие, Ньютон ясно осознавал его значение. Так, в 1676 г. он отмечал: «Я не мог бы, конечно, получить этих общих результатов, прежде чем не отвлекся от рассмотрения фигур и не свел все просто к исследованию ординат» (т. е. фактически функций от времени).

Сам термин «функция» впервые встречается в рукописи великого немецкого математика и философа Г. Лейбница — сначала в рукописи (1673 г.), а затем и в печати (1692 г.). Латинское слово function переводится как «свершение», «исполнение» (глагол fungor переводится также словом «выражать»). Лейбниц ввел это понятие для названия различных параметров, связанных с положением точки на плоскости. В ходе переписки Лейбниц и его ученик — швейцарский математик И. Бернулли (1667—1748) постепенно приходят к пониманию функции как аналитического выражения и в 1718 г. дает такое определение: «Функцией переменной величины называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной и постоянных».

Л. Эйлер в своей книге «Введение в анализ» (1748 г.) формулировал определение функции так: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо способом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств».

Эйлер же ввел и принятые сейчас обозначения для функций.

Современное определение числовой функции, в котором это понятие уже освобождалось от способа задания, было дано неза-

Ньютон Исаак

(1643—1727) —

великий английский ученый. Одновременно с Г. Лейбницем разработал основы математического анализа. Создатель классической механики. Ньютону принадлежат выдающиеся открытия в оптике, других разделах физики и математики. Главный его труд — «Математические начала натуральной философии» — оказал колоссальное влияние на развитие естествознания.



висимо друг от друга русским математиком Н. И. Лобачевским (1834 г.) и немецким математиком Л. Дирихле (1837 г.). Основная идея этих определений заключалась в следующем: не существенно, каким образом (и в частности, необязательно путем задания аналитического выражения) каждому x поставлено в соответствие определенное значение y, важно только, что это соответствие установлено.

Современное понятие функции с произвольными областями определения и значений (необязательно числовыми — см. с. 26) сформировалось, по существу, совсем недавно, в первой половине текущего столетия, после работ создателя теории множеств Г. Кантора (1845—1918).

Сложный и, как видите, очень длительный путь развития понятия функции довольно типичен. Для того чтобы осознать необходимость введения нового абстрактного понятия, требуется выделить его в процессе решения многих конкретных задач, дать определение, по возможности точно отражающее его смысл. История понятия функции хорошо иллюстрирует известную формулу В. И. Ленина: «... абстракции отражают природу глубже, вернее, *полнее*. От живого созерцания к абстрактному мышлению *и от него к практике* — таков диалектический путь познания *истины*». (Ленин В. И. Полн. собр. соч.— Т. 29.— С. 152—153.)

К понятию функции математики пришли, отправляясь от конкретных и трудных задач математики и ее приложений. Это происходило в процессе создания нового мощного аппарата исследований — интегрального и дифференциального исчислений, с элементами которых вы познакомитесь в следующей главе. Открытие интегрального и дифференциального исчислений, центральным понятием которых Эйлер провозгласил функцию («Весь анализ бесконечного вращается вокруг переменных количеств и их функций»), резко расширило возможности математики.

Яркие характеристики глубины переворота в математике, происшедшего в XVII столетии, дали Карл Маркс и Фридрих Энгельс, который, в частности, писал: «Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*». (Маркс К., Энгельс Ф. Собр. соч.— Т. 20.— С. 573.)

Вопросы и задачи на повторение

1. 1) Что такое угол в 1 радиан? Запишите формулы, связывающие радианную и градусную меры угла.

2) Выразите в радианной мере величину угла:

а) 18°; б) −250°; в) −360°; г) 225°.

3) Выразите в градусной мере величину угла:

а) π; б) −2,5; в) $-\frac{\pi}{3}$; г) 3.

2. 1) Дайте определения синуса и косинуса числа α.

2) Отметьте на единичной окружности точку P_α. Найдите значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ (не пользуясь калькулятором или таблицами), если α равно:

а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{5\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{6}$.

3) Найдите значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если α равно:

а) 23°24′; б) −1,7; в) −108°6′; г) 0,8.

3. 1) Дайте определения тангенса и котангенса числа α. При каких значениях α определены $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$?

2) Найдите (не пользуясь калькулятором или таблицами) $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если α равно:

а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\frac{13\pi}{4}$; в) $-\frac{7\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{3}$.

3) Найдите значения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если α равно:

а) 1,7; б) −0,4; в) 2,3; г) −0,5.

4. 1) Запишите формулы, связывающие значения тригонометрических функций одного аргумента.

2) Упростите выражение:

а) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$;

б) $\frac{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{\cos\alpha}$;

в) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

г) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)$.

3) Докажите тождество:

а) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$; б) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$;

в) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$; г) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

5. 1) Как зависят знаки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ от того, в какой координатной четверти лежит точка P_α? Назовите эти знаки.

2) Определите знак:

а) $\sin(-212°)$ и $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{9}$; б) $\cos 305°$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)$;

в) $\cos(-105°)$ и $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{9}$; г) $\sin(-324°)$ и $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4}$.

3) По данному значению одной из тригонометрических функций и промежутку, которому принадлежит α, найдите значения остальных трех основных тригонометрических функций:

а) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; б) $\operatorname{ctg}\alpha=-3$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

в) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; г) $\cos\alpha=\frac{1}{7}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

6. 1) Сформулируйте мнемоническое правило для запоминания формул приведения. Запишите несколько формул приведения.

2) Приведите к значению тригонометрической функции наименьшего положительного аргумента:

а) $\sin\left(-\frac{13\pi}{8}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\frac{21\pi}{13}$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$; г) $\cos\frac{8\pi}{3}$.

3) Упростите выражение:

а) $\sin\frac{7\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;

б) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$;

в) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4}+\sin\frac{37\pi}{12}-\cos\frac{7\pi}{12}$;

г) $\frac{\sin(\alpha-\pi)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)}$.

7. 1) Запишите формулы синуса, косинуса, тангенса суммы (разности).

2) Найдите значение выражения:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; б) $\cos\frac{\pi}{12}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

г) $\sin 75°$ и $\operatorname{tg} 75°$.

3) Докажите тождество:

а) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\operatorname{tg}2x$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\sqrt{3}$; г) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$.

8. 1) Запишите формулы двойного аргумента.

2) Вычислите:

а) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\cos\alpha<0$;

в) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{15}{17}$;

г) $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

3) Докажите тождество:

а) $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}(2\cos^2\alpha-1)=\sin 2\alpha$; б) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

в) $1-(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=\sin 2\alpha$; г) $\operatorname{tg}\alpha(1+\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha$.

9. 1) Запишите формулы суммы и разности синусов (косинусов).

2) Вычислите, не пользуясь калькулятором или таблицами:

а) $\cos 117°+\cos 63°$; б) $\dfrac{\sin 70°-\sin 10°}{\cos 40°}$;

в) $\cos\frac{19\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}$; г) $\sin 112°+\sin 248°$.

3) Докажите тождество:

а) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;

б) $(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)^2+(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)^2=4\cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$;

г) $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha=4\sin 3\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha$.

10. 1) Запишите формулы половинного аргумента.

2) Найдите:

а) $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

в) $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\frac{3}{7}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\frac{2}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

3) Упростите выражение:

а) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha$; б) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$;

в) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; г) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

11. 1) Что такое числовая функция, ее область определения, область значений?

2) Найдите область определения функции:

а) $y=\frac{3x+1}{x^2-7x+12}$; б) $y=\frac{1}{\sin x}$; в) $y=\sqrt{4-x^2}$; г) $y=\frac{1}{\cos x}$.

3) Найдите область значений функции:

а) $y=3\cos x-1$; б) $y=\frac{1}{x^2}+1$; в) $y=2-\sin x$; г) $y=3-x^4$.

12. 1) Что такое график функции?

2) Постройте график функции:

а) $y=\frac{2}{x-1}$; б) $y=2-\cos x$; в) $y=\sqrt{x+2}$; г) $y=\sin x-1$.

3) Найдите точки пересечения графика функции f с осями координат:

а) $f(x)=x^3-4x$; б) $f(x)=\frac{1}{x}+1$; в) $f(x)=1-x^4$; г) $f(x)=\frac{1}{x-3}$.

13. 1) Сформулируйте определение функции, возрастающей (убывающей) на множестве P.

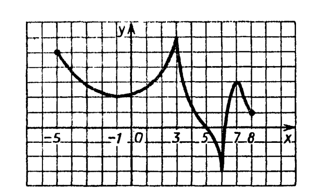
2) Найдите промежутки возрастания и убывания функции, график которой изображен на рисунке 79.

3) Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y=1+0{,}5\cos x$; б) $y=-\frac{3}{x-1}$; в) $y=2x^2+4x$;

г) $y=1{,}5\sin x-1$.

14. 1) Дайте определения точки максимума, точки минимума. Что такое экстремум функции?



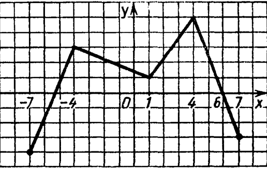


Рис. 79

2) Укажите точки максимума и точки минимума функций, графики которых изображены на рисунке 79.

3) Найдите точки максимума и точки минимума функции:

а) $y=(x-3)^2+2$; б) $y=\cos^2 x$;

в) $y=1-(x+2)^2$; г) $y=\sin^2 x$.

15. 1) Какие задачи решаются при исследовании функции?

2) Проведите исследование функции:

а) $y=\sin x-2$; б) $y=-\frac{6}{x-3}$;

в) $y=x^2-4x+3$; г) $y=2\cos x+1$.

3) Постройте графики этих функций.

16. 1) Дайте определения четной и нечетной функций. Каким свойством обладают их графики?

2) Выясните, какая из указанных ниже функций является четной, а какая — нечетной:

а) $y=\frac{\sin x}{x}$; б) $y=x+x^5$;

в) $y=x\cos x$; г) $y=3x^2+x^6$.

3) Постройте график функции f, если известно, что:

а) f — нечетная; $f(x)=\cos x-1$ при $x\in(-\infty;\ 0]$;

б) f — четная; $f(x)=(x-1)^3$ при $x\in[0;\ \infty)$;

в) f — четная; $f(x)=\sin x$ при $x\in(-\infty;\ 0]$;

г) f — четная; $f(x)=4x-x^2$ при $x\in[0;\ \infty)$.

17. 1) Что такое периодическая функция, период функции?

2) Какой наименьший положительный период имеет функция:

а) $y=\cos x$; б) $y=\operatorname{tg} x$; в) $y=\sin x$; г) $y=\operatorname{ctg} x$?

3) Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y=\sin\frac{x}{2}$; б) $y=\cos(4x+1)$; в) $y=\operatorname{tg} 2x$; г) $y=\cos\frac{x}{3}$.

18. 1) Перечислите основные свойства функции синус.

2) Пользуясь свойствами функции синус, расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sin 0{,}3$, $\sin 1{,}1$, $\sin(-1{,}2)$; б) $\sin 4$, $\sin 3{,}6$, $\sin 2$;
в) $\sin 0{,}4$, $\sin(-0{,}9)$, $\sin 1{,}4$; г) $\sin 4{,}3$, $\sin 2{,}9$, $\sin 1{,}9$.

3) Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=\sin\frac{x}{3}$;
в) $y=1+1{,}5\sin x$; г) $y=\sin 2x$.

19. 1) Перечислите основные свойства функции косинус.
2) Пользуясь свойствами функции косинус, расположите в порядке возрастания числа:

а) $\cos 0{,}3$, $\cos(-2{,}9)$, $\cos 1{,}8$; б) $\cos 5{,}3$, $\cos 4{,}4$, $\cos 6{,}2$;
в) $\cos 0{,}5$, $\cos(-1{,}3)$, $\cos 3$; г) $\cos 6{,}1$, $\cos 3{,}5$, $\cos 4{,}9$.

3) Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=-\cos x$;
в) $y=2\cos x-1$; г) $y=\cos\frac{x}{2}$.

20. 1) Перечислите основные свойства функции тангенс.
2) Пользуясь свойствами функции тангенс, расположите в порядке возрастания числа:

а) $\operatorname{tg}(-0{,}4)$, $\operatorname{tg} 1{,}2$, $\operatorname{tg} 0{,}8$; б) $\operatorname{tg} 2{,}8$, $\operatorname{tg} 3{,}9$, $\operatorname{tg} 1{,}6$;
в) $\operatorname{tg} 0{,}6$, $\operatorname{tg}(-1{,}3)$, $\operatorname{tg}(-0{,}7)$; г) $\operatorname{tg} 4{,}3$, $\operatorname{tg} 1{,}7$, $\operatorname{tg} 2{,}5$.

3) Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y=-\operatorname{tg} x$; б) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; в) $y=2\operatorname{tg} x$; г) $y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

21. 1) Сформулируйте теорему о корне.

2) Сформулируйте определение арксинуса числа. Для каких чисел определен арксинус?
3) Найдите значение выражения:

а) $\arcsin(-1)+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

в) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-\arcsin 1$; г) $\arcsin 0-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

22. 1) Сформулируйте определения арккосинуса и арктангенса числа.
2) Для каких чисел определены арккосинус и арктангенс числа?
3) Найдите значение выражения:

а) $\arccos(-1)+\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; б) $\arccos\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{arctg}(-1)-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arccos 0+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

23. 1) Запишите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений: $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$.
При каких значениях a эти уравнения имеют решения?
2) Решите уравнение:

а) $2\cos x+\sqrt{3}=0$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x+1=0$;
в) $2\sin x-\sqrt{2}=0$; г) $2\cos x-1=0$.

24. Решите уравнение:

1) а) $2\sin^2 x+3\sin x=2$; б) $\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+3=0$;
в) $2\cos^2 x-5\cos x=3$; г) $2\sin^2 x+\sin x=0$.

2) а) $6\sin^2 x-2\sin 2x=1$; б) $\sin^2 x-\cos^2 x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $4\sin x\cos x=\sqrt{3}$; г) $\cos^4 x-\sin^4 x=1$.

25. Решите неравенство (предварительно укажите на единичной окружности множество точек P_x, таких, что x удовлетворяет данному неравенству):

1) а) $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $2\cos x+1<0$;
в) $\operatorname{tg} x<\sqrt{3}$; г) $\sqrt{2}\sin x+1>0$.

2) а) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}>-\frac{1}{4}$; б) $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}$;
в) $2\sin^2\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{2}$; г) $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Глава II

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ

12. Приращение функции

Часто нас интересует не значение какой-либо величины, а ее изменение. Например, сила упругости пружины пропорциональна удлинению пружины; работа есть изменение энергии; средняя скорость — это отношение перемещения к промежутку времени, за который было совершено это перемещение, и т. д.

При сравнении значения функции f в некоторой фиксированной точке x_0 со значениями этой функции в различных точках x, лежащих в окрестности x_0, удобно выражать разность $f(x)-f(x_0)$ через разность $x-x_0$, пользуясь понятиями «приращение аргумента» и «приращение функции». Объясним их смысл.

Пусть x — произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки x_0. Разность $x-x_0$ называется *приращением независимой переменной* (или *приращением аргумента*) в точке x_0 и обозначается Δx. Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0,$$

откуда следует, что $x = x_0 + \Delta x$.

Говорят также, что первоначальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx. Вследствие этого значение функции f изменится на величину

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Эта разность называется *приращением функции* f в точке x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначается символом Δf (читается «дельта эф»), т. е. по определению

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0), \qquad (1)$$

откуда

$$f(x)=f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta f.$$

Обратите внимание: при фиксированном x_0 приращение Δf есть функция от Δx.

Δf называют также приращением зависимой переменной и обозначают через Δy для функции $y=f(x)$.

○ Пример 1. Найдем приращения Δx и Δf в точке x_0, если $f(x)=x^2$, $x_0=2$ и: а) $x=1{,}9$; б) $x=2{,}1$.

а) $\Delta x = x - x_0 = 1{,}9-2=-0{,}1$;

$\Delta f = f(1,9) - f(2) = 1,9^2 - 2^2 = -0,39;$

б) $\Delta x = x - x_0 = 2,1 - 2 = 0,1;$

$\Delta f = f(2,1) - f(2) = 2,1^2 - 2^2 = 0,41.$

Пример 2. Найдем приращение Δf функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке x_0, если приращение аргумента равно Δx.

По формуле (1) находим:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} =$$

$$= \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0 (x_0 + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x_0 (x_0 + \Delta x)}$$

Пример 3. Дан куб с ребром a. Выразим погрешность ΔV, допущенную при вычислении объема этого куба, если погрешность при измерении длины ребра равна Δx. По определению приращения $x = a + \Delta x$, тогда

$$\Delta V = V(x) - V(a) = (a + \Delta x)^3 - a^3 = 3a^2 \Delta x + 3a (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3. \bullet$$

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Геометрический смысл приращений Δx и Δf (приращение Δf обозначают также Δy) можно понять, рассмотрев рисунок 80.

Прямую l, проходящую через любые две точки графика функции f, называют *секущей* к графику f. Угловой коэффициент k секущей, проходящей через точки $(x_0; y_0)$ и $(x; y)$, равен $\frac{y - y_0}{x - x_0}$. Его удобно выразить через приращения Δx и Δy (рис. 80):

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

(Напомним, что угловой коэффициент прямой $y = kx + b$ равен тангенсу угла α, который эта прямая образует с осью абсцисс.)

С помощью введенных обозначений приращений удобно также выражать среднюю скорость движения за промежуток времени

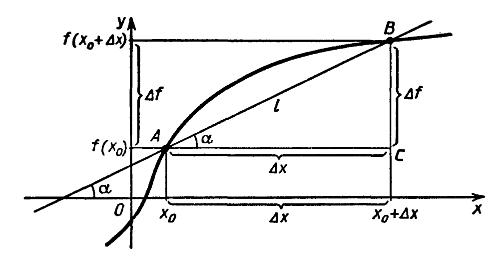


Рис. 80

$[t_0; t_0+\Delta t]$. Если точка движется по прямой и известна ее координата $x(t)$, то

$$V_{ср}(\Delta t)=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}.$$

Эта формула верна и для $\Delta t<0$ (для промежутка $[t_0+\Delta t; t_0]$). В самом деле, в этом случае перемещение точки равно $x(t_0)-x(t_0+\Delta x)$; длительность промежутка времени равна $-\Delta t$, и, следовательно,

$$V_{ср}(\Delta t)=\frac{x(t_0)-x(t_0+\Delta t)}{-\Delta t}=\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}.$$

Аналогично выражение $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ называют *средней скоростью изменения функции* на промежутке с концами x_0 и $x_0+\Delta x$.

Упражнения

177. а) Стороны прямоугольника равны 15 м и 20 м. Найдите приращения его периметра и площади, если: 1) меньшую его сторону увеличили на 0,11 м; 2) бо́льшую его сторону увеличили на 0,2 м.

б) Радиус круга равен 2 см. Найдите погрешность, допущенную при вычислении его площади, если погрешность при измерении длины радиуса равна: 1) 0,2 см; 2) ΔR; 3) 0,1 см; 4) h.

178. Найдите приращение функции f в точке x_0, если:

а) $f(x)=-\frac{2}{x}$, $x_0=-2$, $\Delta x=0{,}1$;

б) $f(x)=2x^2-3$, $x_0=3$, $\Delta x=-0{,}2$;

в) $f(x)=3x+1$, $x_0=5$, $\Delta x=0{,}01$;

г) $f(x)=\frac{x^2}{2}$, $x_0=2$, $\Delta x=0{,}1$.

179. Найдите приращения Δx и Δf в точке x_0, если:

а) $f(x)=\cos^2 x$, $x_0=\frac{2\pi}{3}$, $x=\frac{3\pi}{4}$;

б) $f(x)=4x-x^2$, $x_0=2{,}5$, $x=2{,}6$;

в) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{3}$;

г) $f(x)=\sqrt{2x-1}$, $x_0=1{,}22$, $x=1{,}345$.

180. Выразите приращение функции f в точке x_0 через x_0 и Δx, если:

а) $f(x)=1-3x^2$; б) $f(x)=ax+b$; в) $f(x)=2x^2$; г) $f(x)=-\frac{1}{x}$.



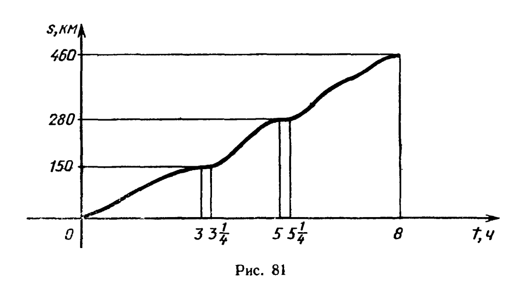


Рис. 81

181. На рисунке 81 изображен график движения автобуса. Найдите среднюю скорость движения за промежуток времени:

а) [0; 3]; б) [3; 5]; в) [3,25; 5,25]; г) [0; 8].

182. Точка движется по координатной прямой, причем в любой момент времени t ее координата равна $3+12t-t^2$. На сколько и в каком направлении переместится точка за промежуток I времени: а) [2; 2,5]; б) [7; 8]; в) [4; 5]; г) [6; 8]? Чему равна ее средняя скорость?

183. Постройте прямые, проходящие через точку (1; 3) и имеющие угловые коэффициенты: а) -1 и 2; б) $\frac{1}{2}$ и -3; в) 3 и -2; г) $-\frac{1}{2}$ и -2. Выясните в каждом из случаев, какой угол (тупой или острый) образуют эти прямые с осью абсцисс

184. Найдите угловой коэффициент секущей к графику функции $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, прохо ящей через точки с данными абсциссами x_1 и x_2. Какой угол (острый или тупой) образует секущая с осью Ox, если:

а) $x_1=0$, $x_2=1$; б) $x_1=-1$, $x_2=-2$;
в) $x_1=1$, $x_2=2$; г) $x_1=-1$, $x_2=0$?

---

185. Ребро куба x получило приращение Δx. Найдите приращение площади полной поверхности куба.

186. Выразите Δf и $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ через x_0 и Δx и преобразуйте полученные выражения:

а) $f(x)=-x^3+3x$; б) $\frac{1}{x^2-1}$;

в) $f(x)=x^3-2x$; г) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

187. Найдите среднюю скорость точки, движущейся по прямой, за промежуток времени $[t_0;\ t_0+\Delta t]$, если известен закон движения:

а) $x(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}$; б) $x(t)=-at+b$;

в) $x(t)=\frac{gt^2}{2}$; г) $x(t)=at-b$.

13. Понятие о производной

1. Понятие о касательной к графику функции. Графики практически всех известных вам функций изображались в виде гладких кривых. Рассмотрим, как геометрически устроены такие кривые, на конкретном примере — графике функции $y=x^2$ (рис. 82) при значениях аргумента, близких к 1.

Для этого увеличим единицу масштаба (по сравнению с масштабом рисунка 82) в 10 раз; в этом масштабе построим график $y=x^2$ на отрезке $[0,5;\ 1,5]$ (рис. 83). Затем, увеличивая масштаб еще в 10 раз, построим график функции на отрезке $[0,95;\ 1,05]$ (рис. 84) На этом рисунке хорошо видно, что при значениях, близких к 1, график функции $y=x^2$ практически не отличается от маленького отрезка прямой $y=2x-1$, т. е. точки графика данной функции как бы «выстраиваются» вдоль этой прямой.

Аналогичным свойством обладает любая гладкая кривая: произвольный ее маленький участок практически не отличается от отрезка некоторой прямой l. (Интересно заметить, что графопостроители, применяемые в ЭВМ, «рисуют» графики гладких функций по точкам, проводя в каждой точке маленький отрезок.) Отметим, что для каждой точки гладкой кривой соответствующая этой точке прямая (т. е. прямая, отрезком которой мы представляем себе маленький участок кривой) вполне определена. Чтобы понять это, обратимся к следующей наглядной иллюстрации.

Допустим, мы хотим изготовить трафарет, чтобы быстро рисовать синусоиду, параболу или гиперболу и т. п. Для этого предварительно на миллиметровой бумаге строится возможно точнее график этой кривой. Как вы можете убедиться, с помощью ножниц удается аккуратно вырезать трафарет, граница которого — нужная нам кривая. Положение ножниц в каждой точке (а оно и задает искомую прямую в этой точке) вполне определено: любое отклонение ножниц в ходе разрезания от этого положения приводит либо к появлению выступа, либо к прорезу трафарета.

Проходящую через точку $(x_0;\ f(x_0))$ прямую, с отрезком которой практически сливается график функции f при значениях x, близких к x_0, называют *касательной к графику функции* f в точке $(x_0;\ f(x_0))$. Возникает естественная задача: определить точное положение касательной к графику данной функции f в заданной точке.



Рис. 82

Рис. 83

Рис. 84

Координаты одной точки прямой l известны — это точка $(x_0;\ f(x_0))$. Остается найти угловой коэффициент k касательной

В качестве примера рассмотрим функцию $y=x^2$. Ее график в малой окрестности точки x_0 близок к отрезку касательной l. Поэтому естественно ожидать, что угловые коэффициенты секущих, проходящих через точки $(x_0;\ x_0^2)$ и $(x_0+\Delta x;\ (x_0+\Delta x)^2)$, будут близки к угловому коэффициенту k, если Δx будет неограниченно приближаться к нулю (т. е. точка x приближается к x_0)

Угловой коэффициент $k(\Delta x)$ секущей, проходящей через точки $(x_0;\ y(x_0))$ и $(x_0+\Delta x;\ y(x_0+\Delta x))$, равен $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (п. 12), где Δy — приращение функции y в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента. Для функции $y=x^2$

$$k(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x. \qquad (1)$$

Чтобы найти угловой коэффициент касательной, остается выяснить, к какому значению близко $k(\Delta x)$, если Δx приближается к нулю. Очевидно, что $k(\Delta x)$ близко к $2x_0$. Следовательно, при очень малых значениях Δx угловой коэффициент секущей близок к $2x_0$. При $x_0=1$ получаем $k=2$. Учитывая, что искомая касательная проходит через точку (1; 1), приходим к выводу, что уравнение касательной таково: $y=2x-1$. К этому же выводу пришли в начале пункта из чисто наглядных соображений.

2. Мгновенная скорость движения. Обратимся теперь к задаче, известной вам из физики. Рассмотрим движение точки по прямой. Пусть координата x точки в момент времени t равна $x(t)$. Как и в курсе физики, предполагаем, что движение осуществляется непрерывно и плавно. Иными словами, речь идет о движениях, наблюдаемых в реальной жизни. Для определенности будем считать, что речь идет о движении автомобиля по прямолинейному участку шоссе.

Поставим задачу: по известной зависимости $x(t)$ определить скорость, с которой движется автомобиль в момент времени t (как вы знаете, эта скорость называется *мгновенной скоростью*). Если зависимость $x(t)$ линейна, ответ прост: в любой момент времени скорость есть отношение пройденного пути ко времени. Если движение не равномерно, задача сложнее.

Тот факт, что в любой момент времени автомобиль движется с какой-то определенной (для этого момента) скоростью, очевиден Эту скорость легко найти, сделав в момент времени t_0 фотоснимок спидометра. (Показание спидометра указывает значение мгновенной скорости в момент t.) Чтобы найти скорость $v_{\text{мгн}}(t_0)$, зная $x(t)$, на уроках физики вы поступали следующим образом

Средняя скорость за промежуток времени длительностью $|\Delta t|$ от t_0 до $t_0+\Delta t$ известна (п. 12):

$$v_{\text{ср}}(\Delta t)=\frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Как мы предположили, тело движется плавно. Поэтому естественно полагать: если Δt очень мало, то за этот промежуток времени скорость практически не меняется. Но тогда средняя скорость (на этом промежутке) практически не отличается от значения $v_{\text{мгн}}(t_0)$, которое мы ищем. Это подсказывает следующий способ определения мгновенной скорости: найти $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ и посмотреть, к какому значению оно близко, если считать, что Δt практически не отличается от нуля.

Рассмотрим конкретный пример. Найдем мгновенную скорость тела, брошенного вверх со скоростью v_0. Высота его в момент t находится по известной формуле $h(t)=v_0 t-\frac{gt^2}{2}$.

1) Найдем сначала Δh:

$$\Delta h(t)=v_0(t_0+\Delta t)-\frac{g(t_0+\Delta t)^2}{2}-v_0t_0+\frac{gt_0^2}{2}=v_0\Delta t-gt_0\Delta t-\frac{g(\Delta t)^2}{2}$$

2) $$v_{\text{ср}}(\Delta t)=\frac{(v_0-gt_0)\Delta t-g\frac{(\Delta t)^2}{2}}{\Delta t}=v_0-gt_0-\frac{g\Delta t}{2} \qquad (3)$$

3) Будем теперь уменьшать Δt, приближая его к нулю. (Для краткости говорят, что Δt стремится к нулю. Это записывается так: $\Delta t\to 0$.)

Как легко понять, в этом случае значение $-\frac{g\Delta t}{2}$ тоже стремится к нулю, т. е.

$$-\frac{g\Delta t}{2}\to 0 \text{ при } \Delta t\to 0.$$

А поскольку величины v_0 и $-gt_0$, а значит, и v_0-gt_0 постоянны, из формулы (3) получаем:

$$v_{\text{ср}}(\Delta t)\to v_0-gt_0 \text{ при } \Delta t\to 0.$$

Итак, мгновенная скорость точки в момент времени t_0 находится по формуле

$$v_{\text{мгн}}(\Delta t)=v_0-gt_0.$$

3. Производная. Рассмотренные две задачи о вычислении углового коэффициента касательной к параболе в точке с абсциссой $x_0=1$ и нахождении мгновенной скорости тела, брошенного вверх со скоростью v_0, имели различные формулировки. Однако в обоих случаях мы действовали, по существу, придерживаясь одной схемы. В применении к произвольной функции f и любой точке x_0 ее области определения эта схема может быть описана следующим образом.

1) С помощью формулы, задающей функцию f, находим ее приращение в точке x_0:

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

2) Находим выражение для *разностного отношения* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

которое затем преобразуем — упрощаем, сокращаем на Δx и т. п.

3) Выясняем, к какому числу стремится $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если считать, что Δx стремится к нулю.

Найденное таким образом число иногда называется (по аналогии с физикой) *скоростью изменения функции* f в точке x_0 или (что более принято) *производной функции* f *в точке* x_0.

Определение. ***Производной функции f в точке x_0*** **называется число, к которому стремится разностное отношение**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

при Δx, стремящемся к нулю.

Производная функции f в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ (читается: «Эф штрих от x_0»).

○ Пример 1. Найдем производную функции $f(x)=x^3$ в точке x_0.

Будем действовать по описанной выше схеме.

1) $\Delta f=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=3x_0^2\,\Delta x+3x_0\,(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$.

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2 \quad (\Delta x\neq 0)$.

3) Теперь заметим, что слагаемое $3x_0^2$ постоянно, а при $\Delta x\to 0$ очевидно, что $3x_0\Delta x\to 0$ и $(\Delta x)^2\to 0$, а значит, и $3x_0\Delta x+(\Delta x)^2\to 0$. Получаем:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}\to 3x_0^2 \text{ при } \Delta x\to 0.$$

Следовательно,

$$f'(x_0)=3x_0^2.$$

Пример 2. Найдем производную функции $f(x)=kx+b$ (k и b постоянны) в точке x_0.

1) $\Delta f=(k(x_0+\Delta x)+b)-(kx_0+b)=k\Delta x$.

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=k$.

3) Поскольку k — постоянная, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ — постоянное число при любом Δx, и, значит, $\frac{\Delta f}{\Delta x}\to k$ при $\Delta x\to 0$.

Итак, $(kx+b)'=k$. ●

Функцию, имеющую производную в точке x_0, называют *дифференцируемой* в этой точке. Пусть D_1 — множество точек, в которых функция f дифференцируема. Сопоставляя каждому $x\in D_1$ число $f'(x)$, получим новую функцию с областью определения D_1.

Эта функция называется *производной* функции $y=f(x)$ и обозначается f' или y'

Нахождение производной данной функции f называется *дифференцированием.*

В этом пункте мы получили следующие формулы дифференцирования:

$$(x^2)'=2x,\ (x^3)'=3x^2,\ (kx+b)'=k.$$

Полагая в формуле $(kx+b)'=k$, что $k=0$, $b=C$, где C — произвольная постоянная, получаем, что $C'=0$, т. е. *производная постоянной равна нулю.*

Упражнения

188. Постройте график функции f и проведите к нему касательную, проходящую через точку с абсциссой x_0. Пользуясь рисунком, определите знак углового коэффициента этой касательной:

а) $f(x)=x^2-2x-3$, $x_0=0$, $x_0=3$, $x_0=2$, $x_0=-1$,

б) $f(x)=\frac{x^2}{2}+1$, $x_0=-2$, $x_0=1$, $x_0=-1$, $x_0=2$.

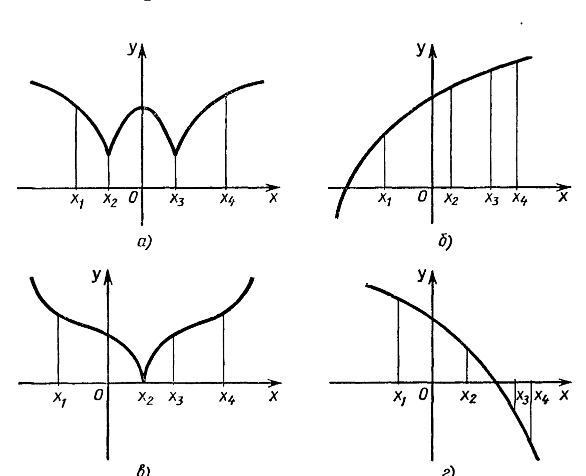


Рис. 85

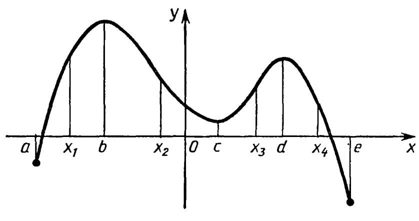


Рис. 86

189. Определите знак углового коэффициента касательной, проведенной к графику функции (рис. 85) через точки с абсциссой x_1, x_2, x_3, x_4 (если касательная существует). Какой угол (острый или тупой) образует эта касательная с осью абсцисс? В окрестности каких точек график функции является «гладкой» кривой?

190. Запишите промежутки возрастания и убывания функции (рис. 86). Определите знак углового коэффициента касательной в каждой из точек, отмеченных на графике.

191. Вычислите $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ в точке x_0, если:

а) $f(x)=2x^2$, $x_0=1$, Δx равно 0,5; 0,1; 0,01;
б) $f(x)=x^2$, $x_0=1$, Δx равно 0,5; 0,1; 0,01.

192. К какому числу стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, если:

а) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=8x_0+4\Delta x$, x_0 равно 2; -1;

б) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2$, x_0 равно 1; -21;

в) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=3x_0-2\Delta x$, x_0 равно 4; 1;

г) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=-2x_0+\Delta x$, x_0 равно 1; 2?

193. Используя формулы дифференцирования, полученные в п. 13, найдите производную функции f в точке x_0, если:

а) $f(x)=x^3$, x_0 равно 2; $-1,5$;
б) $f(x)=4-2x$, x_0 равно 0,5; -3;
в) $f(x)=3x-2$, x_0 равно 5; -2;
г) $f(x)=x^2$, x_0 равно 2,5; -1.

194. Пользуясь определением производной, найдите значения производной функции f, если:

а) $f(x)=x^2-3x$ в точках -1; 2;

б) $f(x)=2x^3$ в точках 0; 1;

в) $f(x)=\frac{1}{x}$ в точках -2; 1;

г) $f(x)=4-x^2$ в точках 3; 0.

195. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2$, проходящей через его точку с абсциссой x_0, если:

а) $x_0=-1$; б) $x_0=3$; в) $x_0=0$; г) $x_0=2$.

196. Пользуясь определением, найдите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $x(t)$, в момент t_0:

а) $x(t)=-t^2+8t$, $t_0=6$; б) $x(t)=3t^3+2$, $t_0=2$;

в) $x(t)=\frac{t^2}{4}$, $t_0=4$; г) $x(t)=5t-3$, $t_0=10$.

14. Понятие о непрерывности функции и предельном переходе

Вернемся к задаче определения мгновенной скорости в точке t_0 (см формулу (3) п. 13). Функция $v_{ср}(\Delta t)=v_0-gt_0-g\cdot\frac{\Delta t}{2}$ не определена при $\Delta t=0$. Но для числа $L=v_0-gt_0$ при уменьшении $|\Delta t|$ разность $v_{ср}(\Delta t)-L$ приближается к нулю. Именно поэтому мы писали $v_{ср}(\Delta t)\to v_0-gt_0$ при $\Delta t\to 0$.

Вообще говорят, что *функция f стремится к числу L при x, стремящемся к x_0*, если разность $f(x)-L$ сколь угодно мала, т. е. $|f(x)-L|$ становится меньше любого фиксированного $h>0$ при уменьшении $|\Delta x|$, где $\Delta x=x-x_0$. (Значение $x=x_0$ не рассматривается, как и в задаче определения мгновенной скорости.)

Вместо $x\to x_0$ можно, конечно, писать $\Delta x\to 0$.

Нахождение числа L по функции f называют *предельным переходом*. Вы будете иметь дело с предельными переходами в двух следующих основных случаях.

Первый случай — это предельный переход в разностном отношении $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, т. е. нахождение производной. С этим случаем вы познакомились в предыдущем пункте.

Второй случай связан с понятием непрерывности функции. Если $f(x)\to f(x_0)$ при $x\to x_0$, то функцию называют *непрерывной в точке* x_0. При этом $f(x)-L=f(x)-f(x_0)=\Delta f$; получаем, что $|\Delta f|$ мало при малых $|\Delta x|$, т. е. малым изменениям аргумента в точке x_0 соответствуют малые изменения значений функции. Все известные вам элементарные функции непрерывны в каждой точке своей

области определения. Графики таких функций изображаются непрерывными кривыми на каждом промежутке, целиком входящем в область определения. На этом и основан способ построения графиков «по точкам», которым вы все время пользуетесь. Но при этом, строго говоря, надо предварительно выяснить, действительно ли рассматриваемая функция непрерывна. В простейших случаях такое исследование проводят на основании определения непрерывности.

○ Пример 1. Докажем, что линейная функция $f(x)=kx+b$ непрерывна в каждой точке числовой прямой.

Нам нужно показать, что $|\Delta f|$ становится меньше любого фиксированного $h>0$ при малых $|\Delta x|$. Но $|\Delta f|=|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|=|k(x_0+\Delta x)+b)-(kx_0+b)|=|k||\Delta x|$ и $|\Delta f|$ будет меньше $h>0$, если взять $|\Delta x|<\frac{h}{|k|}$ при $k\neq 0$ (при $k=0$ можно брать любое Δx).

Пример 2. Докажем, что функция $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывна в точке x_0 при $x_0>0$.

Прежде всего отметим, что Δx мы будем выбирать таким, что $|\Delta x|\leqslant x_0$; тогда $\sqrt{x}=\sqrt{x_0+\Delta x}$ определен. Оценим разность $\sqrt{x}-\sqrt{x_0}$:

$$|\Delta f|=|\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}|=\left|\frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right|=$$

$$=\left|\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right|<\frac{|\Delta x|}{\sqrt{x_0}}.$$

Легко видеть, что $|\Delta f|$ станет меньше $h>0$, если взять $|\Delta x|$ меньше $\sqrt{x_0}h$ (и, как мы отмечали выше, меньше x_0). ●

▽ В задаче определения мгновенной скорости число $v_{\text{мгн}}(t_0)$ было определено так, что функция $v_{\text{ср}}(\Delta t)$, «дополненная» в нуле числом $v_{\text{мгн}}$, становится непрерывной в этой точке. Та же ситуация и в задаче определения углового коэффициента касательной: функция $g(\Delta x)=2x_0+\Delta x$ станет непрерывной в этой точке, если считать, что $g(0)=2x_0$. ▲

Как видно из примеров предыдущего пункта, новая операция — предельный переход — служит новым средством нахождения неизвестных величин. Ею мы будем широко пользоваться в этой главе. Выделим правила предельного перехода, которые доказываются в курсах математического анализа.

Правило 1. *Если функция f непрерывна в точке x_0, то $\Delta f\to 0$ при $\Delta x\to 0$.*

Правило 2. *Если функция f имеет производную в точке x_0, то $\frac{\Delta f}{\Delta x}\to f'(x_0)$ при $\Delta x\to 0$.*

Правила 1 и 2 сразу следуют из определений непрерывности функции f в точке x_0 и производной в точке x_0.

Правило 3. *Пусть $f(x)\to A$, $g(x)\to B$ при $x\to x_0$. Тогда при $x\to x_0$ (т. е. при $\Delta x\to 0$):*

а) $f(x)+g(x)\to A+B$;
б) $f(x)\cdot g(x)\to A\cdot B$;
в) $\frac{f(x)}{g(x)}\to\frac{A}{B}$ (при $B\neq 0$).

Для непрерывных функций f и g

$$A=f(x_0),\ B=g(x_0)$$

и эти правила означают, что сумма, произведение и частное непрерывных в точке x_0 функций непрерывны в точке x_0 (частное в случае, когда $g(x_0)\neq 0$).

Правила предельного перехода широко используются при доказательстве непрерывности функций и выводе формул дифференцирования.

○Пример 3. Докажем, что функция $h(x)=10x+\sqrt{x}$ непрерывна в любой точке x_0 промежутка $(0;\ \infty)$. Непрерывность функций $f(x)=10x$ и $g(x)=\sqrt{x}$ была доказана в примерах 1 и 2. Следовательно, функция h непрерывна как сумма двух непрерывных функций (правило 3, а).

Пример 4. Докажем, что $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, где $f(x)=\sqrt{x}$.

1) Для произвольной точки x_0

$$\Delta f=\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\Delta x}}$$

(см. пример 2).

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\Delta x}}$.

3) $\sqrt{x_0+\Delta x}\to\sqrt{x_0}$ при $\Delta x\to 0$ по правилу 1, так как функция $\sqrt{x}$ непрерывна в точке x_0 (см. пример 2), поэтому $\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\Delta x}\to 2\sqrt{x_0}$ при $\Delta x\to 0$ (по правилу 3, а) и $\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\Delta x}}\to\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ при $\Delta x\to 0$ (по правилу 3, в). Итак,

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

для любого положительного x. ●

Упражнения

197. Является ли непрерывной в каждой из точек x_1, x_2, x_3 функция, график которой изображен на рисунке 87?

198. Постройте график функции f. Содержится ли в ее области определения точка, в которой функция не является непрерывной?

а) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{при } x\leqslant -1, \\ 1-x^2 & \text{при } x>-1; \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} 4 & \text{при } x<0, \\ 4-x^2 & \text{при } x\geqslant 0; \end{cases}$

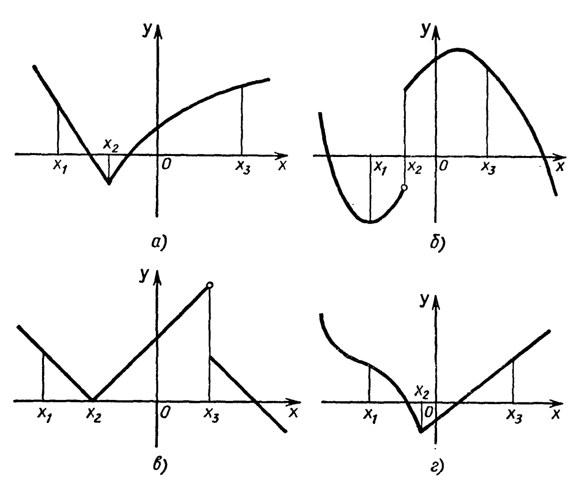


Рис. 87

в) $f(x)=\begin{cases} 2-x \text{ при } x\leqslant 1, \\ 2x-1 \text{ при } x>1; \end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases} x+2 \text{ при } x<1, \\ \frac{1}{x} \text{ при } x\geqslant 1. \end{cases}$

199. Является ли функция f непрерывной в каждой точке данного промежутка:

а) $f(x)=x^3-4x$, $(-\infty;\ \infty)$; б) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$, $[2;\ \infty)$;

в) $f(x)=x^2+2x-1$, $[-10;\ 20]$; г) $f(x)=5x-\sqrt{x}$, $(0;\ \infty)$?

200. К какому числу стремится функция f, если:

а) $f(x)=x^2-3x+4$, $x\to 0$, $x\to 2$;

б) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $x\to 1$, $x\to 4$;

в) $f(x)=4-\frac{x}{2}$, $x\to -2$, $x\to 0$;

г) $f(x)=4x-\frac{x^2}{4}$, $x\to -1$, $x\to 4$?

201. Известно, что $f(x)\to 1$, $g(x)\to -2$ при $x\to 3$. К какому числу при $x\to 3$ стремится функция:

а) $3f(x)g(x)$; б) $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}$; в) $4f(x)-g(x)$; г) $(3-g(x))f(x)$?

202. Известно, что $f(x) \to 3$, $g(x) \to -0{,}5$ при $x \to -1$. Найдите число, к которому при $x \to -1$ стремится функция:

а) $\frac{f(x)}{(g(x))^2}$; б) $(f(x)-g(x))^2$;

в) $(f(x))^2+2g(x)$; г) $\frac{(g(x))^2}{f(x)-2}$.

---

203. К какому числу стремится функция:

а) $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x-3}$ при $x \to 4$;

б) $f(x)=\frac{x^3-3x}{x^2-2x+7}$ при $x \to -1$;

в) $f(x)=\frac{5-2x}{2+x}$ при $x \to 2$;

г) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$ при $x \to -1$?

204. С какой точностью найден периметр квадрата, если его сторона измерена с точностью до 0,01 дм?

205. С какой точностью достаточно измерить сторону правильного треугольника, чтобы найти его периметр с точностью 0,03 дм?

206. С какой точностью нужно измерить радиус, чтобы вычислить длину окружности с точностью до 0,06 дм?

207. Известно, что $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ при $x \to a$. Пользуясь правилами предельного перехода, докажите, что:

а) $Cf(x) \to C \cdot A$, где C — постоянная;

б) $f(x)-g(x) \to A-B$;

в) $(f(x))^2-(g(x))^2 \to A^2-B^2$;

г) $(f(x))^n \to A^n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

15. Правила вычисления производных

1. Основные правила дифференцирования. Выведем несколько правил вычисления производных. В этом пункте значения функций u и v и их производных в точке x_0 обозначаются для краткости так: $u(x_0)=u$, $v(x_0)=v$, $u'(x_0)=u'$, $v'(x_0)=v'$.

Правило 1. *Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0, то их сумма дифференцируема в этой точке и*

$$(u+v)'=u'+v'.$$

Коротко говорят: *производная суммы равна сумме производных.*

1) Для доказательства вычислим сначала приращение суммы функций в рассматриваемой точке:

$$\Delta(u+v)=u(x_0+\Delta x)+v(x_0+\Delta x)-(u(x_0)+v(x_0))=$$
$$=(u(x_0+\Delta x)-u(x_0))+(v(x_0+\Delta x)-v(x_0))=\Delta u+\Delta v.$$

2) $\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$

3) Функции u и v дифференцируемы в точке x_0, т. е. при $\Delta x\to 0$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}\to u', \ \frac{\Delta v}{\Delta x}\to v'.$$

Тогда $\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x}\to u'+v'$ при $\Delta x\to 0$ (см. правило 3, а) предельного перехода п. 14), т. е. $(u+v)'=u'+v'$.

Лемма. *Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке: $\Delta f\to 0$ при $\Delta x\to 0$, т. е.*

$$f(x_0+\Delta x)\to f(x_0) \text{ при } \Delta x\to 0.$$

Действительно, $\Delta f=\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\Delta x\to f'(x_0)\cdot 0$ при $\Delta x\to 0$, так как $\frac{\Delta f}{\Delta x}\to f'(x_0)$, а $\Delta x\to 0$. Итак, $\Delta f\to 0$ при $\Delta x\to 0$, т. е. для дифференцируемых функций $f(x_0+\Delta x)\to f(x_0)$ при $\Delta x\to 0$.

Правило 2. *Если функции **u** и **v** дифференцируемы в точке x_0, то их произведение дифференцируемо в этой точке и*

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

▽ 1) Найдем сначала приращение произведения:

$$\Delta(uv)=u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x)-u(x_0)v(x_0)=$$
$$=(u(x_0)+\Delta u)(v(x_0)+\Delta v)-u(x_0)v(x_0)=$$
$$=u(x_0)v(x_0)+\Delta uv(x_0)+u(x_0)\Delta v+\Delta u\Delta v-u(x_0)v(x_0)=$$
$$=\Delta uv(x_0)+u(x_0)\Delta v+\Delta u\Delta v$$

2) $\frac{\Delta(uv)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x_0)+u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$

3) В силу дифференцируемости функций u и v в точке x_0 при $\Delta x\to 0$ имеем $\frac{\Delta u}{\Delta x}\to u'$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}\to v'$, $\Delta u\to 0$. Поэтому $\frac{\Delta(uv)}{\Delta x}\to u'v(x_0)+u(x_0)v'+0\cdot v'=u'v(x_0)+u(x_0)v'$, т. е. $(uv)'=u'v+uv'$, что и требовалось доказать. ▲

Следствие. *Если функция **u** дифференцируема в x_0, а **C** — постоянная, то функция **Cu** дифференцируема в этой точке и*

$$(Cu)'=Cu'.$$

Коротко говорят: *постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

Для доказательства воспользуемся правилом 2 и известным из п. 13 фактом $C'=0$:

$$(Cu)'=C'u+Cu'=0\cdot u+Cu'=Cu'.$$

П р а в и л о 3. *Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 и функция v не равна нулю в этой точке, то частное $\frac{u}{v}$ также дифференцируемо в x_0* и

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

▽ Выведем сначала формулу

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}.$$

1) Найдем приращение функции $\frac{1}{v}$:

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right)=\frac{1}{v(x_0+\Delta x)}-\frac{1}{v(x_0)}=\frac{v(x_0)-v(x_0+\Delta x)}{v(x_0)\,v(x_0+\Delta x)}=\frac{-\Delta v}{v(x_0)\,(v(x_0)+\Delta v)}.$$

2) Отсюда

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x}=\frac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0)\,(v(x_0)+\Delta v)}.$$

3) При $\Delta x\to 0$ имеем $\frac{\Delta v}{\Delta x}\to v'$ (в силу дифференцируемости v в точке x_0), $\Delta v\to 0$ (по доказанной лемме). Поэтому

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x}\to\frac{-v'}{v\cdot v}=-\frac{v'}{v^2}, \text{ т. е. } \left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}.$$

Теперь, пользуясь правилом нахождения производной произведения функций, находим производную частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\left(u\cdot\frac{1}{v}\right)'=u'\cdot\frac{1}{v}+u\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{u'}{v}+u\cdot\frac{-v'}{v^2}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

○ П р и м е р 1. Найдем производные функций: а) $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$; б) $f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$.

а) $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{x'}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$, поэтому $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)'=(x^2)'-\left(\frac{1}{x}\right)'=$ $=2x-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x+\frac{1}{x^2}$;

б) $\left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)'=\frac{(x^2)'(x^3+1)-x^2(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{2x(x^3+1)-x^2((x^3)'+1')}{(x^3+1)^2}=$ $=\frac{2x(x^3+1)-x^2(3x^2+0)}{(x^3+1)^2}=\frac{2x^4+2x-3x^4}{(x^3+1)^2}=\frac{2x-x^4}{(x^3+1)^2}$. ●

2. Производная степенной функции. Формула для вычисления производной степенной функции x^n, где n — произвольное натуральное число, большее 1, такова:

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (1)$$

Формула производной функции x^2 уже известна: $(x^2)' = 2x$. Пользуясь формулой дифференцирования произведения, получаем:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)'x + x^2(x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2;$$
$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)'x + x^3(x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3.$$

Заметим теперь, что

$$(x^2)' = 2x^{2-1},\ (x^3)' = 3x^{3-1},\ (x^4)' = 4x^{4-1},$$

т. е. для n, равного 2, 3 и 4, формула (1) доказана. Продолжая аналогичные рассуждения, нетрудно убедиться в справедливости формулы (1) для n, равного 5, 6 и т. д.

∇ Докажем, что формула (1) верна для любого натурального $n > 4$.

Допустим, что формула (1) верна при $n = k$, т. е. что

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Покажем, что тогда формула (1) верна при $n = k+1$. Действительно,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)' =$$
$$= kx^{k-1} \cdot x + x^k = kx^k + x^k = (k+1)\,x^k.$$

Поэтому из того, что формула (1) верна при $n = 4$, следует, что она верна и при $n = 5$, но тогда она верна и при $n = 6$, а следовательно, и при $n = 7$ и т. д. до любого $n \in N$ (строгое доказательство основано на методе математической индукции). ▲

Если $n = 1$ или $n = 0$, то при $x \neq 0$ эта формула также справедлива. Действительно, по формуле (1) при $x \neq 0$

$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1,$$
$$(x^0)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0,$$

что совпадает со значениями производных функций x и 1, уже известными из предыдущего пункта.

Пусть, наконец, n — целое отрицательное число, тогда $n = -m$, где m — число натуральное. Применяя правило дифференцирования частного и пользуясь уже доказанной для натуральных m формулой (1), получаем при $x \neq 0$:

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-(x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot \frac{1}{x^{m+1}} =$$
$$= -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

В результате можно сделать вывод:
Для любого целого n и любого x ($x \neq 0$ при $n \leqslant 1$)

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

○ Пример 2. Найдем производные функций: а) $f(x) = x^{-5}$; б) $f(x) = 3x^7 - \frac{5}{x^3}$.

а) $(x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$;

б) $\left(3x^7 - \frac{5}{x^3}\right)' = 3(x^7)' - 5(x^{-3})' = 3 \cdot 7x^6 - 5(-3)x^{-4} =$
$= 21x^6 + \frac{15}{x^4}$. ●

Из дифференцируемости степенной функции и основных правил вычисления производных вытекает, что *целые рациональные функции (многочлены) и дробно-рациональные функции дифференцируемы в каждой точке своей области определения.*

Упражнения

Найдите производные функций (208—211).

208. а) $f(x) = x^2 + x^3$; б) $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$;
в) $f(x) = x^2 + 3x - 1$; г) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$.

209. а) $f(x) = x^3(4 + 2x - x^2)$; б) $f(x) = \sqrt{x}(2x^2 - x)$;
в) $f(x) = x^2(3x + x^3)$; г) $f(x) = (2x - 3)(1 - x^3)$.

210. а) $y = \frac{1+2x}{3-5x}$; б) $y = \frac{x^2}{2x-1}$; в) $y = \frac{3x-2}{5x+8}$; г) $y = \frac{3-4x}{x^2}$.

211. а) $y = x^8 - 3x^4 - x + 5$; б) $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x}$;
в) $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1$; г) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x^3} + 1$.

212. Вычислите значения производной функции f в данных точках:

а) $f(x) = x^2 - 3x$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$;
б) $f(x) = x - 4\sqrt{x}$, $x = 0{,}01$, $x = 4$;
в) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;
г) $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$, $x = -3$, $x = 0$.

213. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = 2x^2 - x$; б) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$;
в) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1{,}5x^2 - 4x$; г) $f(x) = 2x - 5x^2$.

214. Решите неравенство $f'(x)<0$, если:

а) $f(x)=4x-3x^2$; б) $f(x)=x^3+1{,}5x^2$;

в) $f(x)=x^2-5x$; г) $f(x)=4x-\frac{1}{3}x^3$.

---

215. Найдите производную функции:

а) $f(x)=\frac{x^3-3x}{1+4x^5}$; б) $f(x)=\left(\frac{3}{x}+x^2\right)\left(2-\sqrt{x}\right)$;

в) $f(x)=\frac{5-2x^6}{1-x^3}$; г) $f(x)=\sqrt{x}\,(3x^5-x)$.

216. Найдите значения x, при которых производная функции f равна нулю:

а) $f(x)=x^5-3\frac{1}{3}x^3+5x$; б) $f(x)=2x^4-x^8$;

в) $f(x)=x^4+4x$; г) $f(x)=x^4-12x^2$.

217. Решите неравенство $f'(x)<0$, если:

а) $f(x)=x^3-6x^2-63x$; б) $f(x)=3x-5x^2+x^3$,

в) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-8x$; г) $f(x)=3x^2-9x-\frac{1}{3}x^3$.

218. Задайте формулой хотя бы одну функцию, производная которой равна:

а) $2x+3$; б) $16x^3-0{,}4$;

в) $8x-2$; г) $9x^2-\frac{1}{2}$.

219. Верно ли, что функция $\varphi(x)=f_1(x)+f_2(x)$ не имеет производной в точке x_0, если известно, что:

а) каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не имеет производной в точке x_0;

б) $f_1(x)$ имеет производную в точке x_0, а $f_2(x)$ не имеет?

16. Производная сложной функции

1. Сложная функция. Начнем с рассмотрения примера.

○ П р и м е р 1. Пусть требуется вычислить по заданному значению x соответствующее значение z функции h, заданной формулой

$$z=h(x)=\sqrt{1-x^2}.$$

Для этого надо сначала вычислить по заданному x значение

$$y=f(x)=1-x^2,$$

а затем уже по этому y вычислить

$$z=g(y)=\sqrt{y}.$$

Итак, функция f ставит в соответствие числу x число y, а функция g — числу y число z. Говорят, что h есть *сложная функция*, составленная из функций g и f, и пишут:

$$h(x)=g(f(x)).$$

Чтобы вычислить значение сложной функции $h(x)=g(f(x))$ в произвольной точке x, сначала вычисляют значение y «внутренней» функции f в этой точке, а затем $g(y)$.

Какова область определения сложной функции $g(f(x))$? Это — множество всех тех x из области определения функции f, для которых $f(x)$ входит в область определения функции g.

В рассматриваемом примере областью определения функции f является вся числовая прямая. Значение $h(x)$ определено, если значение $f(x)$ принадлежит области определения функции $g(y)=\sqrt{y}$. Поэтому требуется, чтобы выполнялось неравенство $y\geqslant 0$, т. е. $1-x^2\geqslant 0$, и, значит, область определения функции $g(f(x))$ — это отрезок $[-1;\ 1]$. ●

2. Формула производной сложной функции. В предыдущих пунктах вы научились находить производные рациональных функций, в частности многочленов. Однако задача вычисления производной функции $f(x)=(2x+3)^{100}$, хотя и сводится к нахождению производной многочлена, требует очень большого объема работы: надо представить $(2x+3)^{100}$ в виде многочлена и продифференцировать 101 слагаемое полученной суммы. Можно заметно упростить решение этой и других задач, доказав правило вычисления производной сложной функции.

Если функция f имеет производную в точке x_0, а функция g имеет производную в точке $y_0=f(x_0)$, то сложная функция $h(x)=g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем

$$h'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0). \qquad (1)$$

▽ Для доказательства формулы (1) надо (как и раньше) при $\Delta x\neq 0$ рассмотреть дробь $\frac{\Delta h}{\Delta x}$ и установить, что $\frac{\Delta h}{\Delta x}\to g'(y_0)\cdot f'(x_0)$ при $\Delta x\to 0$. Введем обозначения:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f.$$

Тогда $\Delta h=h(x_0+\Delta x)-h(x_0)=g(f(x_0+\Delta x))-g(f(x_0))=g(y_0+\Delta y)-g(y_0)=\Delta g$.

$\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$, так как f дифференцируема в точке x_0.

Далее доказательство мы проведем только для таких функций f, у которых $\Delta f\neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Тогда $\frac{\Delta h}{\Delta x}=\frac{\Delta h}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta g}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta f}{\Delta x}\to g'(y_0)\cdot f'(x_0)$ при $\Delta x\to 0$, так как $\frac{\Delta f}{\Delta x}\to f'(x_0)$ при $\Delta x\to 0$, а $\frac{\Delta g}{\Delta y}\to g'(y_0)$ при $\Delta y\to 0$, что выполнено при $\Delta x\to 0$ (это отмечалось выше). ▲

○ Пример 2. Вернемся к поставленной выше задаче и найдем производную функции $h(x)=(2x+3)^{100}$.

Функцию h можно представить в виде сложной функции

$$h(x)=g(f(x)),\text{ где } g(y)=y^{100},\ y=f(x)=2x+3.$$

Так как $f'(x)=2$ и $g'(y)=100y^{99}$, имеем

$$h'(x)=2\cdot 100y^{99}=200(2x+3)^{99}.$$

Пример 3. Найдем производную функции $h(x)=\sqrt{3x^2+1}$. Так как $h(x)=g(f(x))$, где $y=f(x)=3x^2+1$, $g(y)=\sqrt{y}$, то $g'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ и $y'=f'(x)=6x$, откуда

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}.\ ●$$

Упражнения

Задайте формулами элементарные функции f и g, из которых составлена сложная функция $h(x)=g(f(x))$ (220—221).

220. а) $h(x)=\cos 3x$; б) $h(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $h(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $h(x)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

221. а) $h(x)=(3-5x)^5$; б) $h(x)=\sqrt{\cos x}$;

в) $h(x)=(2x+1)^7$; г) $h(x)=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$.

Найдите область определения каждой из функций (222—223).

222. а) $y=\sqrt{9-x^2}$; б) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-7x+12}}$;

в) $y=\sqrt{0{,}25-x^2}$; г) $y=\frac{1}{\sqrt{4x+5-x^2}}$.

223. а) $y=\sqrt{\cos x}$; б) $y=\frac{1}{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$;

в) $y=\operatorname{tg} 2x$; г) $y=\sqrt{\sin x}$.

Найдите производные функций (224—225).

224. а) $f(x)=(2x-7)^8$; б) $f(x)=\frac{1}{(5x+1)^3}$;

в) $f(x)=(9x+5)^4$; г) $f(x)=\frac{1}{(6x-1)^5}$.

225. а) $f(x)=\left(3-\frac{x}{2}\right)^{-9}$; б) $f(x)=\left(\frac{1}{4}x-7\right)^8-(1-2x)^4$;

в) $f(x)=(4-1{,}5x)^{10}$; г) $f(x)=(5x-2)^{13}-(4x+7)^{-6}$.

226. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{1-2\cos x}$; б) $y=\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}$;

в) $y=\sqrt{\sin x-0{,}5}$; г) $y=\sqrt{\frac{1}{x}+1}$.

227. Заданы функции $f(x)=3-2x$, $g(x)=x^2$ и $p(x)=\sin x$. Задайте формулой сложную функцию h, если:

а) $h(x)=f(g(x))$; б) $h(x)=g(p(x))$;

в) $h(x)=g(f(x))$; г) $h(x)=p(f(x))$.

228. Заданы функции $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $g(x)=\cos x$ и $p(x)=\sqrt{x}$. Задайте формулой сложную функцию h; найдите ее область определения, если:

а) $h(x)=f(g(x))$; б) $h(x)=f(p(x))$;

в) $h(x)=p(g(x))$; г) $h(x)=p(f(x))$.

229. Найдите такую функцию f, что $f(g(x))=x$:

а) $g(x)=2x$; б) $g(x)=\sqrt{x}$;

в) $g(x)=3x+2$; г) $g(x)=x^2+1$, $x\leqslant 0$.

230. Найдите производную функции f:

а) $f(x)=(x^3-2x^2+3)^{17}$; б) $f(x)=\sqrt{1-x^4}+\frac{1}{x^2+3}$;

в) $f(x)=\sqrt{4x^2+5}$; г) $f(x)=(3-x^3)^5+\sqrt{2x-7}$.

17. Производные тригонометрических функций

1. Формула производной синуса. Доказем, что *функция синус имеет производную в любой точке и*

$$(\sin x)'=\cos x. \qquad (1)$$

Применяя формулу $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, находим

$$\frac{\Delta\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Для вывода формулы (1) достаточно показать, что:

а) $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$ при $\Delta x \to 0$;

б) $\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x_0$ при $\Delta x \to 0$.

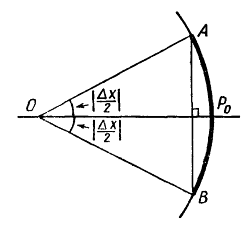


Рис. 88

Опираясь на эти утверждения, можно получить формулу (1). Действительно, при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) \to 1\cdot\cos x_0=\cos x_0.$$

∇ Утверждения а) и б), на которые мы опирались выше, имеют наглядный геометрический смысл.

а) Отложим на единичной окружности от точки P_0 в обе стороны дуги P_0A и P_0B длиной $\frac{|\Delta x|}{2}$ (рис. 88) Тогда длина дуги AB равна $|\Delta x|$, а длина хорды AB равна $2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|$. При малых $|\Delta x|$ длина хорды AB практически не отличается от длины стягиваемой ею дуги AB. (Этим фактом вы уже пользовались в курсе геометрии при выводе формулы длины окружности. Действительно, при больших n верно, как известно, приближенное равенство $P_n \approx C$, где P_n — периметр правильного вписанного n-угольника, а C — длина окружности. Значит, длина стороны такого многоугольника приближенно равна длине дуги, которую эта сторона стягивает.) Следовательно,

$$\frac{AB}{\breve{AB}}=\frac{\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|}{\left|\frac{\Delta x}{2}\right|}=\left|\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right| \to 1 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

б) Заметим, что длина хорды AB меньше длины дуги AB, т. е. $2\sin\frac{|\Delta x|}{2}<2\cdot\frac{|\Delta x|}{2}$.

Воспользовавшись формулой разности косинусов и этим неравенством, находим:

$$\left|\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)-\cos x_0\right|=\left|-2\sin\frac{\Delta x}{4}\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{4}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant\left|2\sin\frac{\Delta x}{4}\right| \leqslant \frac{|\Delta x|}{2}.$$

Но $\frac{|\Delta x|}{2} \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому $\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x_0$ при $\Delta x \to 0$. ▲

○ Пример. По формуле дифференцирования сложной функции

$$(\sin (ax+b))' = a \cos (ax+b). \ ●$$

2. Формулы дифференцирования косинуса, тангенса и котангенса. Докажем, что *функции* $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ *имеют производные в каждой точке своей области определения и справедливы формулы:*

$$(\cos x)' = -\sin x, \tag{2}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{3}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{4}$$

Вывод формулы (2) основан на равенствах $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ и правиле дифференцирования сложной функции:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = -\sin x.$$

Чтобы доказать справедливость формул (3) и (4), применим формулу для нахождения производной частного и выведенные формулы производной синуса и косинуса:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Упражнения

Найдите производную каждой из функций (231—233).

231. а) $y=2\sin x$; б) $y=1-\frac{1}{2}\sin x$;
в) $y=-0{,}5\sin x$; г) $y=0{,}5+1{,}5\sin x$.

232. а) $y=3\cos x$; б) $y=x+2\cos x$;
в) $y=1-\cos x$; г) $y=2\sin x+1{,}5\cos x$.

233. а) $y=\sqrt{3}-3\operatorname{tg}x$, б) $y=\cos x-\operatorname{tg}x$
в) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x$; г) $y=2\operatorname{tg}x-\sin x$

234. Найдите $f'(0)$ и $f'(\pi)$, если:
а) $f(x)=\frac{1}{2}\cos(2x-\pi)$; б) $f(x)=x-\operatorname{tg}(-2x)$;
в) $f(x)=3\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ · г) $f(x)=2\cos\frac{x}{2}$

235. Решите уравнение $f'(x)=0$, если:
а) $f(x)=\frac{1}{2}x+\cos x$; б) $f(x)=x-\operatorname{tg}x$;
в) $f(x)=2\sin x-1$; г) $f(x)=x-\cos x$

Найдите производную каждой из функций (236—238)

236. а) $f(x)=x^3\sin 2x$, б) $f(x)=x^4+\operatorname{tg}2x$,
в) $f(x)=\frac{\cos 3x}{x}$, г) $f(x)=\frac{x}{\sin x}$

237. а) $f(x)=\sin^2 x$; б) $f(x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$;
в) $f(x)=\cos^2 x$; г) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$

238. а) $f(x)=\cos 2x\sin x+\sin 2x\cos x$;
б) $f(x)=\cos^2\frac{x}{4}-\sin^2\frac{x}{4}$;
в) $f(x)=\sin 5x\sin 3x+\cos 5x\cos 3x$; г) $f(x)=\sin 3x\cos 3x$

239. Найдите точки, в которых $f'(x)=0$, $f'(x)>0$, если.
а) $f(x)=2\sin^2 x-\sqrt{2}x$; б) $f(x)=2x+\cos(4x-\pi)$;
в) $f(x)=\cos 2x$; г) $f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}x$.

240. Задайте формулой хотя бы одну функцию f, если
а) $f'(x)=1-\sin x$; б) $f'(x)=2\cos 2x$
в) $f'(x)=-\cos x$; г) $f'(x)=3\sin x$.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ПРОИЗВОДНОЙ

18. Применения непрерывности

1. Непрерывность функции. В п. 14 вы познакомились с понятием непрерывности функции в точке. Если функция непрерывна в каждой точке некоторого промежутка I, то ее называют *непрерывной на промежутке* I (промежуток I называют *промежутком непрерывности функции* f). При переходе от одной точки этого промежутка к близкой ей точке значение функции меняется мало;

график f на этом промежутке представляет собой непрерывную линию, о которой говорят, что ее можно «нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги». (Так, во всяком случае, обстоит дело для непрерывных функций, изучаемых в школьном курсе.)

Как было показано в п. 15, функция, дифференцируемая в точке x_0, непрерывна в этой точке. Все дробно-рациональные и основные тригонометрические функции дифференцируемы во всех точках своих областей определения. Следовательно, эти функции и непрерывны в каждой из этих точек.

Например, из дифференцируемости функции $f(x)=x^2$ на всей прямой, а функции $f(x)=\frac{1}{x}$ на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$ вытекает непрерывность этих функций на соответствующих промежутках.

Отметим следующее свойство непрерывных функций:

Если на интервале $(a; b)$ *функция* f *непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.* Это утверждение имеет наглядную интерпретацию. Допустим, что найдутся такие точки x_1 и x_2 интервала $(a; b)$, что $f(x_1)<0$, а $f(x_2)>0$.

Тогда непрерывная кривая (график функции f), соединяющая точки $A(x_1; f(x_1))$ и $B(x_2; f(x_2))$, разделенные прямой $y=0$, пересекает эту прямую в некоторой точке x_3 данного интервала (рис. 89), т. е. $f(x_3)=0$. (Представим себе, что точки A и B находятся на разных берегах реки, изображаемой интервалом $(a; b)$. Ясно, что туристу, для того чтобы попасть из A в B, надо где-то перейти реку.) Это противоречит условию: функция f не обращается на интервале $(a; b)$ в нуль.

2. Метод интервалов. На свойстве непрерывных функций, рассмотренном в этом пункте (его полное доказательство приводится в курсах математического анализа), основан метод решения неравенств с одной переменной (*метод интервалов*). Опишем его.

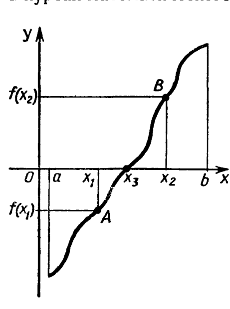
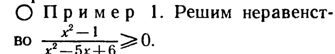


Рис. 89

Пусть функция f непрерывна на интервале I и обращается в нуль в конечном числе точек этого интервала. По сформулированному выше свойству непрерывных функций этими точками I разбивается на интервалы, в каждом из которых непрерывная функция f сохраняет постоянный знак. Чтобы определить этот знак, достаточно вычислить значение функции f в какой-либо одной точке из каждого такого интервала.

○ Пример 1. Решим неравенство



во $\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}\geq 0$.

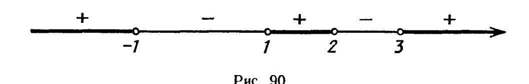


Рис. 90

Функция $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ непрерывна в каждой точке своей области определения (это дробно-рациональная функция) и обращается в нуль в точках -1 и 1. Область определения этой функции — вся числовая прямая, за исключением нулей знаменателя, т. е. точек 2 и 3. Эти точки и точки -1 и 1 разбивают область определения f на 5 промежутков (рис. 90), в каждом из которых функция f непрерывна и не обращается в нуль. На рисунке отмечен знак f в каждом из соответствующих интервалов, который определяем, найдя знаки значений f во внутренних точках интервалов. Неравенство нестрогое, поэтому числа -1 и 1 (нули функции f) являются решениями неравенства. Рассматривая рисунок, можно записать ответ: множество решений неравенства — объединение промежутков $(-\infty; -1]$, $[1; 2)$ и $(3; \infty)$.

Пример 2. Найдем один из корней уравнения $x^3+2x-2=0$ с точностью до 0,1.

Функция $f(x)=x^3+2x-2$ непрерывна, поэтому достаточно найти отрезок длиной 0,2, на концах которого f имеет значения разных знаков. Имеем $f(1)=1>0$, $f(0)=-2<0$, поэтому корень уравнения существует и он принадлежит отрезку $[0; 1]$. $f(0{,}6)=0{,}6^3+2\cdot 0{,}6-2=-0{,}584<0$ и $f(1)>0$, значит, корень лежит на отрезке $[0{,}6; 1]$. Наконец, $f(0{,}8)=0{,}112>0$, а $f(0{,}6)<0$, получили, что корень на отрезке $[0{,}6; 0{,}8]$. Теперь мы можем его найти: $x_0\approx 0{,}7$ с точностью до 0,1. ●

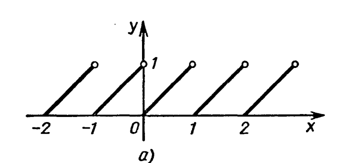
3. Пример функции, не являющейся непрерывной. Практически все функции, с которыми вы встречались до сих пор, непрерывны в любой точке своей области определения. Не следует, однако, считать, что это верно для любой функции.

Приведем пример. Рассмотрим функцию $f(x)=\{x\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x (график $f(x)=\{x\}$ изображен на рисунке 91, *а*), и возьмем любую целочисленную точку оси абсцисс, например $x=2$.

Основное свойство непрерывной в x_0 функции ($f(x_0+\Delta x)\to f(x_0)$ при $\Delta x\to 0$) в данном случае не выполняется. Действительно, пусть $\Delta x\to 0$. Если $\Delta x>0$, то $\{x_0+\Delta x\}$ близко к нулю. Если же $\Delta x<0$, то значения $\{x_0+\Delta x\}$ близки к 1. В то же время функция $f(x)=\{x\}$ непрерывна во всех точках, отличных от точек $x=n$, где n — целое число.

Это свойство функции $f(x)=\{x\}$ нетрудно понять, рассмотрев рисунок 91, *а*.

4. Пример функции, непрерывной, но не дифференцируемой в данной точке. Примером такой функции является функция



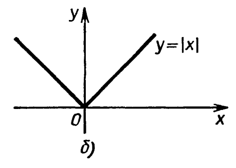


Рис. 91

$f(x)=|x|$ (рис. 91, *б*), которая непрерывна, но не дифференцируема в нуле. Напомним, что

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, \text{ если } x\geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x<0. \end{cases}$$

Непрерывность функции $f(x)=|x|$ в любой точке (в том числе и в нуле) очевидна.

Рассмотрим график этой функции. Для любого $x>0$ в некоторой окрестности точки $x_0>0$ функция равна x, и поэтому производная ее в таких точках равна x', т. е. $|x|'=1$ при $x>0$. Так как $|x|=-x$ при $x<0$, то $|x|'=-1$ при отрицательных значениях x. В точке 0 функция $f(x)=|x|$ не имеет производной. ∇ Докажем это методом от противного. Допустим, что $f(x)=|x|$ имеет производную в нуле, т. е. $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$ стремится к некоторому числу A при $\Delta x\to 0$. Тогда при всех достаточно малых $|\Delta x|$ значения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ близки к A, и, в частности, при малых значениях Δx должно выполняться неравенство $\left|\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}-A\right|<1$.

При $\Delta x>0$ справедливо неравенство $|1-A|<1$, откуда $-1<1-A<1$, т. е.

$$0<A<2. \qquad (1)$$

Для $\Delta x<0$ справедливо неравенство $|-1-A|<1$, откуда $-1<-1-A<1$, т. е.

$$-2<A<0. \qquad (2)$$

Неравенства (1) и (2) противоречивы. Следовательно, наше допущение о существовании производной функции $f(x)=|x|$ в нуле неверно. ▲

Итак,

$$|x|'=\begin{cases} 1 \text{ при } x>0, \\ \text{не существует при } x=0, \\ -1 \text{ при } x<0. \end{cases}$$

Упражнения

241. Является ли функция f непрерывной в точках $x_1=0$ и $x_2=-1$, если:

а) $f(x)=x^4-x+1$; б) $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ при } x\leqslant -1, \\ x^2-x \text{ при } x>-1; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 \text{ при } x<0, \\ 5-2x \text{ при } x\geqslant 0; \end{cases}$ г) $f(x)=2x-x^2+x^3$?

242. Найдите промежутки непрерывности функции:

а) $f(x)=x^3-2x^2$; б) $f(x)=\dfrac{x^3+27}{3x+x^2}$;

в) $f(x)=2x^4-3x^2+4$; г) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-8}$.

243. Докажите, что данное уравнение имеет корень, принадлежащий отрезку $[0; 1]$, и найдите его с точностью до 0,1:

а) $1{,}4-10x^2-x^3=0$; б) $1+2x^2-100x^4=0$;
в) $x^3-5x+3=0$; г) $x^4+2x-0{,}5=0$.

Решите неравенства (244—245).

244. а) $x^2-5x+4>0$; б) $\dfrac{x+3}{x^2+4x-5}\geqslant 0$;

в) $x^2-3x-4\leqslant 0$; г) $\dfrac{x^2-7x+6}{x-2}<0$.

245. а) $\dfrac{(x-2)(x-4)}{x^2+2x-3}\geqslant 0$; б) $\dfrac{8}{x^2-6x+8}<1$;

в) $\dfrac{2x^2+5x}{x^2+5x+4}\geqslant 1$; г) $\dfrac{x^2-2x-3}{(x+3)(x-4)}<0$.

246. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt{x-\dfrac{4}{x-3}}$; б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2-4}+1}$;

в) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+7x+12}{x}}$; г) $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{8}{x^2-1}}$.

---

247. При каких значениях m функция f непрерывна на всей числовой прямой, если:

а) $f(x)=\begin{cases} 4-x \text{ при } x<4, \\ (x-m)^2 \text{ при } x\geqslant 4; \end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2-m}$,

в) $f(x)=\begin{cases} 3x^2+m \text{ при } x\leqslant 0, \\ x+2 \text{ при } x>0; \end{cases}$ г) $f(x)=\dfrac{5-x}{x^4+m}$?

Решите неравенства (248—249)

248. а) $x^4-10x^2+9\leqslant 0$; б) $x^4-8\geqslant 7x^2$;
в) $x^4-5x^2+6>0$; г) $5x^2-4>x^4$

249. а) $(x^2-1)(x+4)(x^3-8)\leqslant 0$; б) $\sqrt{x^2-4}\,(x-3)<0$;
в) $x^2(3-x)(x+2)>0$; г) $\frac{(x-2)^3(x+5)}{(x+3)^2}\geqslant 0$.

250. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt{9x-x^3}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}$;
в) $f(x)=\sqrt{16x-x^3}$, г) $f(x)=\sqrt{1-\frac{27}{x^3}}$

19. Касательная к графику функции

1. Касательная. С понятием касательной к графику функции вы уже знакомы. График дифференцируемой в точке x_0 функции f вблизи x_0 практически не отличается от отрезка касательной, а значит, он близок к отрезку секущей l, проходящей через точки $(x_0; f(x_0))$ и $(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$. Любая из таких секущих проходит через точку $A(x_0; f(x_0))$ графика (рис. 92). Для того чтобы однозначно задать прямую, проходящую через данную точку A, достаточно указать ее угловой коэффициент. Угловой коэффициент $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ секущей при $\Delta x\to 0$ стремится к числу $f'(x_0)$ (его мы примем за угловой коэффициент касательной) Говорят, что *касательная есть предельное положение секущей при* $\Delta x\to 0$.

∇ Если же $f'(x_0)$ не существует, то касательная либо не существует (как у функции $y=|x|$ в точке (0; 0), рис. 91, *б*), либо вертикальна (как у графика $y=\sqrt[3]{x}$ в точке (0; 0), рис. 93). ▲

Итак, существование производной функции f в точке x_0 эквивалентно существованию (невертикальной) касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ графика, при этом *угловой коэффициент касательной* равен $f'(x_0)$. В этом состоит *геометрический смысл производной.*

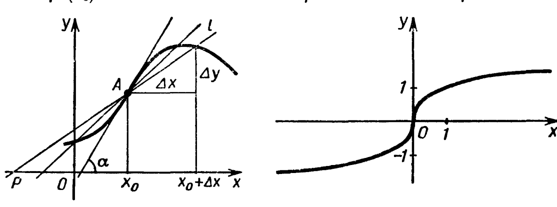
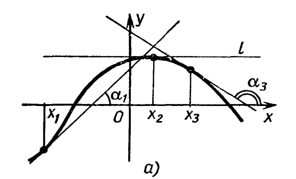


Рис. 92 Рис. 93



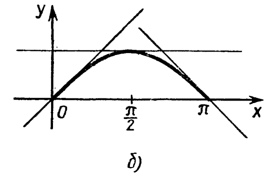


Рис. 94

Касательная к графику дифференцируемой в точке x_0 функции f — это прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.

Проведем касательные к графику функции f в точках x_1, x_2, x_3 (рис. 94, *а*) и отметим углы, которые они образуют с осью абсцисс. (Это угол, отсчитываемый в положительном направлении от положительного направления оси до прямой.) Мы видим, что угол α_1 острый, угол α_3 тупой, а угол α_2 равен нулю, так как прямая l параллельна оси Ox. Тангенс острого угла положителен, тупого — отрицателен, $\operatorname{tg} 0=0$. Поэтому

$$f'(x_1)>0,\ f'(x_2)=0,\ f'(x_3)<0.$$

Построение касательных в отдельных точках позволяет более точно строить эскизы графиков. Так, например, для построения эскиза графика функции синус предварительно находим, что в точках 0; $\frac{\pi}{2}$ и π производная синуса равна 1; 0 и -1 соответственно. Построим прямые, проходящие через точки (0; 0), $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ и $(\pi, 0)$ с угловыми коэффициентами 1, 0 и -1 соответственно (рис. 94, *б*) Остается вписать в полученную трапецию, образованную этими прямыми и прямой Ox, график синуса так, чтобы при x, равном 0, $\frac{\pi}{2}$ и π, он касался соответствующих прямых.

Отметим, что график синуса в окрестности нуля практически не отличим от прямой $y=x$. Пусть, например, масштабы по осям выбраны так, что единице соответствует отрезок в 1 см. Имеем $\sin 0{,}5\approx 0{,}479425$, т. е. $|\sin 0{,}5-0{,}5|\approx 0{,}02$, и в выбранном масштабе это соответствует отрезку длиной 0,2 мм. Поэтому график функции $y=\sin x$ в интервале $(-0{,}5; 0{,}5)$ будет отклоняться (в вертикальном направлении) от прямой $y=x$ не более чем на 0,2 мм, что примерно соответствует толщине проводимой линии.

2. Уравнение касательной. Выведем теперь уравнение касательной к графику функции f в точке $A(x_0; f(x_0))$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $f'(x_0)$ имеет вид:

$$y=f'(x_0)\cdot x+b.$$

Для вычисления b воспользуемся тем, что касательная проходит через точку A:

$$f(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0+b, \text{ откуда } b=f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0,$$

значит, уравнение касательной таково:

$$y=f'(x_0)x-f'(x_0)\cdot x_0+f(x_0),$$

или

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \qquad (1)$$

○ Пример 1. Найдем уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-2x^2+1$ в точке с абсциссой 2.

В этом примере $x_0=2$, $f(x_0)=f(2)=2^3-2\cdot 2^2+1=1$, $f'(x)=3x^2-4x$, $f'(x_0)=f'(2)=3\cdot 2^2-4\cdot 2=4$. Подставляя эти числа в уравнение (1), получаем уравнение $y=1+4(x-2)$, т. е. $y=4x-7$.

Пример 2. Выведем уравнение касательной к параболе $y=x^2$ в точке с абсциссой x_0.

Имеем $y(x_0)=x_0^2$, а $y'(x_0)=2x_0$. Подставляя эти значения в уравнение (1) касательной, получаем $y=x_0^2+2x_0(x-x_0)$, т. е. $y=2x_0x-x_0^2$. Например, при $x_0=1$ получаем касательную, имеющую уравнение $y=2x-1$.

Найдем координаты точки T пересечения касательной к параболе в точке $A(x_0; x_0^2)$ с осью Ox (рис. 95). Если $(x_1; 0)$ — координаты точки T, то, поскольку T принадлежит касательной (и, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению касательной), имеем $0=2x_0x_1-x_0^2$. Если $x_0\neq 0$, то $x_1=\frac{x_0}{2}$.

Полученный результат дает простой способ построения касательной к параболе в любой ее точке A (кроме вершины): достаточно соединить точку A с точкой T, делящей отрезок оси Ox с концами 0 и x_0 пополам; прямая AT — искомая касательная. При $x_0=0$ касательная — это прямая Ox. ●

3. Формула Лагранжа. Воспользуемся геометрическим смыслом производной, чтобы дать наглядные пояснения справедливости того, что существует касательная к графику f в точке с абсциссой c из интервала $(a; b)$, параллельная секущей, проходящей через точки $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$.

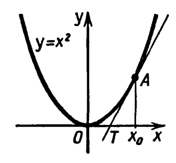


Рис. 95

Рассмотрим прямую l, параллельную AB и не имеющую общих точек с частью графика, соответствующей промежутку $[a; b]$. Будем перемещать эту прямую l по направлению к графику f так, чтобы она оставалась параллельной AB. Зафиксируем положение l_0 этой прямой в момент, когда у нее появятся общие точки с этой частью графика. Из рисунка 96, *а* видно, что любая из таких «первых» общих точек — точка ка-

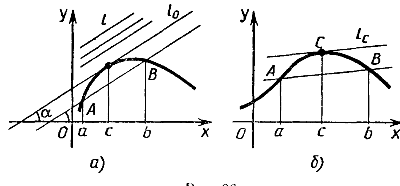


Рис. 96

сания прямой l_0 с графиком f. Обозначим абсциссу этой точки через c. Тогда $f'(c)=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между прямой l_0 и осью абсцисс. Но $l \parallel AB$, поэтому угол α равен углу наклона секущей AB, т. е.

$$f'(c)=\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Итак, если функция дифференцируема, то на интервале $(a; b)$ найдется такая точка $c \in (a; b)$ (рис. 96, б), что

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Эта формула называется *формулой Лагранжа.*

Упражнения

251. В каких точках графика функции f (рис. 97) касательная к нему:
а) горизонтальна;
б) образует с осью абсцисс острый угол;
в) образует с осью абсцисс тупой угол?

252. При каких значениях аргумента (отмеченных на оси абсцисс) производная функции, заданной графиком (рис. 98): а) равна нулю; б) больше нуля; в) меньше нуля?

Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через данную точку M графика функции f (253—254).

253. а) $f(x)=x^2$, $M(-3; 9)$; б) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$, $M\left(2; \frac{2}{3}\right)$;
в) $f(x)=x^3$, $M(-1; -1)$; г) $f(x)=x^2+2x$, $M(1; 3)$.

254. а) $f(x)=2\cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; б) $f(x)=-\operatorname{tg} x$, $M(\pi; 0)$;
в) $f(x)=1+\sin x$, $M(\pi; 1)$; г) $f(x)=-\cos x$, $M(-\pi; 1)$.



Рис. 97

Рис. 98

Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0 (255—256).

255. а) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=-1$, $x_0=1$;

б) $f(x)=2x-x^2$, $x_0=0$, $x_0=2$;

в) $f(x)=x^2+1,\ x_0=0,\ x_0=1$;

г) $f(x)=x^3-1,\ x_0=-1,\ x_0=2$.

256. а) $f(x)=3\sin x,\ x_0=\frac{\pi}{2},\ x_0=\pi$;

б) $f(x)=\operatorname{tg} x,\ x_0=\frac{\pi}{4},\ x_0=\frac{\pi}{3}$;

в) $f(x)=1+\cos x,\ x_0=0,\ x_0=\frac{\pi}{2}$;

г) $f(x)=-2\sin x,\ x_0=-\frac{\pi}{2},\ x_0=\pi$.

Найдите точки графика функции f, в которых касательная параллельна оси абсцисс (257—258).

257. а) $f(x)=x^3-3x^2+3x$;

б) $f(x)=\frac{1}{2}x^4+16x$;

в) $f(x)=3x^4-6x^2+2$;

г) $f(x)=x^3-3x+1$.

258. а) $f(x)=2\cos x+x$;

б) $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}x$;

в) $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

г) $f(x)=\sqrt{2}x-2\sin x$.

259. Под каким углом пересекается с осью Ox график функции

а) $f(x)=3x-x^3$;

б) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $f(x)=x^2-3x+2$;

г) $f(x)=-\cos x$?

260. Под каким углом пересекается с осью Oy график функции:

а) $f(x)=\frac{1}{x-1}$;

б) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2$;

г) $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$?

20. Приближенные вычисления

Пусть, например, требуется вычислить приближенное значение функции

$$f(x)=x^7-2x^6+3x^2-x+3$$

в точке $x=2{,}02$. Значение f в близкой к 2,02 точке $x_0=2$ находится легко: $f(2)=13$. График f в окрестности точки 2 близок к прямой $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ — касательной к нему в точке с абсциссой 2. Поэтому $f(2{,}02)\approx y(2{,}02)$. Имеем $f'(x)=7x^6-12x^5+$ $+6x-1$, $f'(x_0)=f'(2)=75$ и $f(x)\approx y(x)=13+75\cdot 0{,}02=14{,}5$.

Вычисления на калькуляторе дают результат $f(2{,}02)\approx 14{,}57995$.

Вообще для дифференцируемой в точке x_0 функции f при Δx, мало отличающихся от нуля, ее график близок к касательной (проведенной в точке графика с абсциссой x_0), т. е. при малых Δx

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x. \qquad (1)$$

Если точка x_0 такова, что значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ нетрудно вычислить, то формула (1) позволяет находить приближенные значения $f(x)$ при x, достаточно близких к x_0. Так, при вычислении значения $\sqrt{4{,}08}$ естественно взять в качестве x_0 число 4, так как 4,08 близко к 4 и значения $f(x_0)=\sqrt{x_0}$ и $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ при $x_0=4$ найти нетрудно: $f(4)=\sqrt{4}=2$, $f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$. По формуле (1) при $\Delta x=0{,}08$ получаем:

$$\sqrt{4{,}08}\approx 2+\frac{1}{4}\cdot 0{,}08=2{,}02.$$

○ Пример 1. Выведем из формулы (1) приближенную формулу

$$\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{1}{2}\Delta x. \qquad (2)$$

Возьмем $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=1$ и $x=x_0+\Delta x=1+\Delta x$. Имеем $f(x_0)=\sqrt{1}=1$ и $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, откуда $f'(x_0)=f'(1)=\frac{1}{2}$. По формуле (1)

$$f(x)=\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{1}{2}\Delta x.$$

В частности, $\sqrt{1{,}06}=\sqrt{1+0{,}06}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}06=1{,}03$.

Значение $\sqrt{4{,}08}$ также можно найти по формуле (2):

$$\sqrt{4{,}08}=2\sqrt{1{,}02}\approx 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02\right)=2{,}02.$$

Пример 2. Выведем из формулы (1) приближенную формулу

$$(1+\Delta x)^n\approx 1+n\Delta x. \qquad (3)$$

Полагаем $f(x)=x^n$, $x_0=1$ и $x=x_0+\Delta x=1+\Delta x$. Находим $f(x_0)=1$, $f'(x)=nx^{n-1}$, откуда $f'(x_0)=n$. По формуле (1)

$$f(x)=(1+\Delta x)^n\approx 1+n\Delta x.$$

Например, $1{,}001^{100}=(1+0{,}001)^{100}\approx 1+100\cdot 0{,}001=1{,}1$.

Значение $1{,}001^{100}$, вычисленное на калькуляторе, равно 1,10512.

Пример 3. Для вычисления значения $\frac{1}{0{,}997^{30}}$ удобно воспользоваться формулой (3) при $n=-30$, $\Delta x=-0{,}003$:

$$\frac{1}{0{,}997^{30}}=(1-0{,}003)^{-30}\approx 1+(-30)\cdot(-0{,}003)=1+0{,}09=1{,}09. \quad ●$$

Формулой (1) часто пользуются для вычисления приближенных значений и других элементарных функций, например тригоно-

метрических. Так, для вычисления $\sin 1°$ удобно взять $f(x)=$ $=\sin x$, $x_0=0$, при этом $\Delta x=\frac{\pi}{180}$ $\left(\text{так как } 1°=\frac{\pi}{180}\right)$. Имеем $f(x_0)=\sin 0=0$, $f'(x_0)=\cos 0=1$ и

$$\sin x \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=0+1\cdot\Delta x=\Delta x,$$

т. е. $\sin 1° \approx \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017453$. Вычисляя значение $\sin 1°$ на калькуляторе, получаем $\sin 1° \approx 0{,}0174525$.

Упражнения

261. Вычислите с помощью формулы (1) приближенные значения функции f в точках x_1 и x_2:

а) $f(x)=x^4+2x$, $x_1=2{,}016$, $x_2=0{,}97$;

б) $f(x)=x^5-x^2$, $x_1=1{,}995$, $x_2=0{,}96$;

в) $f(x)=x^3-x$, $x_1=3{,}02$, $x_2=0{,}92$;

г) $f(x)=x^2+3x$, $x_1=5{,}04$, $x_2=1{,}98$.

Вычислите с помощью формулы (1) и (3) приближенные значения (262—263).

262. а) $1{,}002^{100}$; б) $0{,}995^6$; в) $1{,}03^{200}$; г) $0{,}998^{20}$.

263. а) $\sqrt{1{,}004}$; б) $\sqrt{25{,}012}$; в) $\sqrt{0{,}997}$; г) $\sqrt{4{,}0016}$.

Вычислите с помощью формулы (1) приближенные значения (264—266).

264. а) $\operatorname{tg} 44°$; б) $\cos 61°$; в) $\sin 31°$; г) $\operatorname{ctg} 47°$.

265. а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+0{,}04\right)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-0{,}02\right)$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0{,}03\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+0{,}05\right)$.

266. а) $\frac{1}{1{,}003^{20}}$; б) $\frac{1}{0{,}996^{10}}$; в) $\frac{1}{2{,}0016^3}$; г) $\frac{1}{0{,}994^5}$.

21. Производная в физике и технике

1. Механический смысл производной. Напомним, как определялась скорость движения в курсе физики. Рассмотрим самый простой случай: материальная точка движется по координатной прямой, причем задан закон движения, т. е. координата x этой точки есть известная функция $x(t)$ времени t. За промежуток времени от t_0 до $t_0+\Delta t$ перемещение точки равно $x(t_0+\Delta t)-x(t_0)=$ $=\Delta x$, а ее средняя скорость такова:

$$v_{\text{ср}}(\Delta t)=\frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (1)$$

При $\Delta t<0$ формула (1) также верна: перемещение равно $x(t_0)-x(t_0+\Delta t)=-\Delta x$, а продолжительность промежутка времени равна $-\Delta t$.

Обычно характер движения бывает таким, что при малых Δt средняя скорость практически не меняется, т. е. движение с большой степенью точности можно считать равномерным (см. пример п. 13). Другими словами, значение средней скорости при $\Delta t \to 0$ стремится к некоторому вполне определенному значению, которое и называют *мгновенной скоростью* $v(t_0)$ материальной точки в момент времени t_0. Итак,

$$v_{\text{ср}}(\Delta t)=\frac{\Delta x}{\Delta t}\to v(t_0) \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Но по определению производной

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\to x'(t_0) \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Поэтому считают, что мгновенная скорость $v(t)$ определена (только) для любой дифференцируемой функции $x(t)$, при этом

$$v(t)=x'(t). \qquad (2)$$

Коротко говорят: *производная от координаты по времени есть скорость.* В этом состоит *механический смысл производной.*

Мгновенная скорость может принимать как положительные, так и отрицательные значения и, конечно, значение 0. Если скорость на каком-либо промежутке времени $(t_1; t_2)$ положительна, то точка движется в положительном направлении, т. е. координата растет с течением времени, а если $v(t)$ отрицательна, то координата $x(t)$ убывает.

Аналогичное положение и с ускорением движения. Скорость движения точки есть функция от времени t. А производная этой функции называется ускорением движения:

$$a=v'(t).$$

Коротко говорят: *производная от скорости по времени есть ускорение.*

○ Пример 1. Рассмотрим свободное падение материальной точки.

Если координатную прямую направить вертикально вниз, а начальное положение материальной точки совпадает с 0, то, как известно из физики, $x(t)=\frac{gt^2}{2}$. Тогда скорость падения точки в момент времени t равна

$$v=\left(\frac{gt^2}{2}\right)'=gt,$$

а ускорение $a=(gt)'=g$ есть величина постоянная. Рассмотрим более общий случай.

Пример 2. Пусть зависимость координаты точки, движущейся по прямой, от времени выражается формулой

$$x(t)=\frac{a}{2}\cdot t^2+v_0t+x_0,$$

где $a\neq 0$, v_0 и x_0 — постоянные. Найдем скорость и ускорение движения.

Скорость этого движения такова:

$$v=x'(t)=\left(\frac{a}{2}t^2+v_0t+x_0\right)'=2\cdot\frac{a}{2}t+v_0=at+v_0.$$

Так как нам известна скорость движения как функция времени, мы можем найти ускорение этого движения: $v'(t)=(at+v_0)'=a$. Мы видим, что ускорение при движении по квадратичному закону постоянно и равно a. Если $a>0$, то это равноускоренное движение; если же $a<0$, то равнозамедленное. Отметим также, что $v_0=v(0)$, а $x_0=x(0)$. ●

В главе III мы докажем, что если при движении по прямой ускорение a постоянно, то движение происходит по квадратичному закону:

$$x(t)=\frac{a}{2}t^2+v_0t+x_0,$$

где v_0 — начальная скорость точки, а x_0 — начальная координата

▽ Пусть $y=f(x)$ — произвольная дифференцируемая функция. Тогда мы можем рассмотреть движение материальной точки по координатной прямой, совершаемое согласно закону $x=f(t)$. Механический смысл производной позволяет дать наглядную интерпретацию теорем дифференциального исчисления.

○ Пример 3. Пусть f и h — две дифференцируемые функции. Рассмотрим следующее (относительное) движение по прямой. Дана подвижная система координат, связанная с поездом, начало которой (кабина машиниста) движется относительно начала неподвижной системы координат (станции) по закону $x_1=f(t)$. В подвижной системе координат материальная точка совершает движение по закону $x_2=h(t)$. Тогда координата x этой точки относительно неподвижной системы координат равна $x=x_1+x_2$, а ее скорость $v(t)$ равна $x'(t)$. С другой стороны, по закону сложения скоростей $v(t)=v_1(t)+v_2(t)=x_1'(t)+x_2'(t)$. Итак, мы получили с помощью механического смысла производной известную формулу:

$$(f+h)'=f'+h'.$$

Пример 4. Пусть материальная точка движется по координатной прямой согласно закону $x=f(t)$.

Средняя скорость этой точки на промежутке $[a; b]$ равна

$$v_{\text{ср}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Мгновенная скорость $v(t)$ в точках промежутка $[a; b]$ не может быть все время меньше (больше) средней. Значит, в какой-то момент $t_0 \in [a; b]$ мгновенная скорость равна средней, т. е. в промежутке $[a; b]$ найдется такое t_0, что

$$v(t_0)=f'(t_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \quad (3)$$ ●

Мы получили механическую интерпретацию формулы Лагранжа. ▲

2. Примеры применения производной. С помощью производных функций, характеризующих физические явления, задаются и другие физические величины. Например, мощность (по определению) есть производная работы по времени. Рассмотрим пример.

○ Пример 5. Пусть дан неоднородный стержень, причем известна масса $m(l)$ любого его куска длиной l (l отсчитывается от фиксированного конца стержня). Хотя стержень неоднороден, естественно полагать, что плотность его небольшой части (на участке от l до $l+\Delta l$) примерно одна и та же $\left(\frac{\Delta m}{\Delta l}\right)$ и чем меньше Δl, тем в меньших пределах на этом участке изменяется плотность. Поэтому за характеристику распределения плотности стержня в зависимости от l принимают *линейную плотность* $d(l)=m'(l)$.

Пример 6. В большинстве задач механики рассматриваются движения точки на плоскости или в пространстве. Тогда скорость — векторная величина. Оказывается, что если координаты точки в момент t равны $x(t)$ и $y(t)$, то координаты вектора $\vec{v}(t)$ скорости равны $x'(t)$ и $y'(t)$. Пользуясь этим, можно вывести формулы производных тригонометрических функций на основе кинематики.

Рассмотрим равномерное движение по окружности радиуса 1 в направлении против часовой стрелки с угловой скоростью 1 (рис. 99). Тогда координаты точки M в момент времени t таковы: $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$. Как вы знаете из курса физики, вектор скорости $\vec{v}(t)$ направлен по касательной к окружности, а его длина равна 1 ($|\vec{v}| = \omega R = 1 \cdot 1 = 1$). Следовательно, этот вектор совпадает с вектором $\overrightarrow{OP}_{t+\frac{\pi}{2}}$, координаты которого равны $\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$ и $\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t$. С другой стороны, координаты вектора $\vec{v}(t)$ равны соответственно $x'(t)$ (т. е. $\cos' t$) и $y'(t)$ (т. е. $\sin' t$). Получаем известные формулы:

$$\cos' t = -\sin t, \quad \sin' t = \cos t.$$

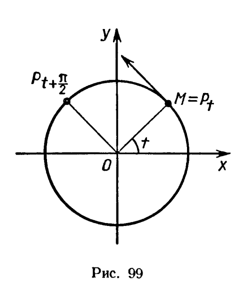


Рис. 99

Пример 7. Выведем свойство параболы, имеющее применение в оптике и технике.

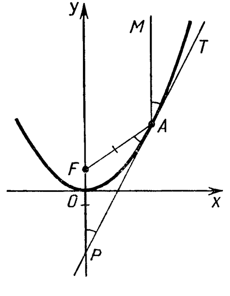


Рис. 100

Поверхность, получающаяся при вращении параболы $y=ax^2$ вокруг оси Oy, называется *параболоидом* вращения. Представим себе, что внутренняя поверхность параболоида — зеркальная поверхность и это параболическое зеркало освещается пучком лучей света, параллельных оси Oy.

Рассмотрим сечение этого зеркала плоскостью α, проходящей через ось Oy. Это сечение представляет собой такую же параболу $y=x^2$ (ось Ox выбираем в плоскости сечения, $a=1$). Согласно законам оптики отраженный луч света будет лежать в плоскости α, причем этот луч образует с касательной к параболе такой же угол, как и падающий луч MA (рис. 100).

∇ Докажем, что все лучи, параллельные оси Oy, после отражения пересекутся в одной точке оси Oy.

Обозначим через F точку пересечения произвольного отраженного луча с осью Oy. Прямая AT — касательная к параболе в точке A. Из законов отражения света (рис. 100) сразу следует, что $\angle TAM=\angle FAP$. Но луч MA параллелен оси Oy, поэтому $\angle FPA=\angle TAM$. Следовательно, $\angle FPA=\angle FAP$, т. е. треугольник FPA равнобедренный и $FA=FP$. Точка A $(x_0;\ y_0)$ лежит на параболе, поэтому $y_0=x_0^2$. Уравнение касательной AT имеет вид $y=2x_0x-x_0^2$. Из него найдем ординату y_P точки P. Она равна $y_P=2x_0\cdot 0-x_0^2$, т. е. $y_P=-y_0$. Если ординату точки F обозначим через y, то $FP=y+y_0$. Длина $FA=\sqrt{x_0^2+(y_0-y)^2}$, и поэтому (вспомним, что $FA=FP$) верно равенство $(y+y_0)^2=x_0^2+(y_0-y)^2$, т. е. $y^2+2yy_0+y_0^2=y_0+y_0^2-2yy_0+y^2$, откуда $4yy_0=y_0$, и поскольку $y_0\neq 0$, получаем $y=\frac{1}{4}$. ▲

Итак, все лучи, параллельные оси параболического зеркала, после отражения сходятся в одной точке, которую называют *фокусом параболического зеркала* (точку F называют также *фокусом параболы* $y=x^2$).

На этом свойстве основано устройство параболических телескопов. Лучи от далеких звезд приходят к нам в виде параллельного пучка. Изготовив параболический телескоп и поместив в его фокус фотопластинку, мы получаем возможность усилить световой сигнал, идущий от звезды. Этот же принцип лежит в основе создания параболических антенн, позволяющих усилить радиосигналы.

Если же поместить в фокусе параболического зеркала источник света, то после отражения от поверхности зеркала лучи, идущие от этого источника, не будут рассеиваться, а соберутся в узкий пучок, параллельный оси зеркала. Этот факт находит применение при изготовлении прожекторов и фонарей, различных проекторов, зеркала которых изготавливают в форме параболоидов. ●

Упражнения

267. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$. а) Выведите формулу для вычисления скорости движения в любой момент времени t. б) Найдите скорость в момент $t = 2$ с. (Перемещение измеряется в метрах.) в) Через сколько секунд после начала движения точка остановится?

268. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 4t^2$. Найдите скорость и ускорение в момент $t = 5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)

269. Вращение тела вокруг оси совершается по закону $\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$. Найдите угловую скорость $\omega(t)$ в произвольный момент времени t и при $t = 4$ с. ($\varphi(t)$ — угол в радианах, $\omega(t)$ — скорость в радианах в секунду, t — время в секундах.)

270. Маховик, задерживаемый тормозом, за время t поворачивается на угол $\varphi(t) = 4t - 0{,}3t^2$. Найдите: а) угловую скорость $\omega(t)$ вращения маховика в момент времени $t = 2$ с; б) такой момент времени, когда маховик остановится. ($\varphi(t)$ — угол в радианах, t — время в секундах.)

---

271. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 + t - 1$. Найдите ускорение в момент времени t. В какой момент времени ускорение будет равно: а) 1 см/с^2; б) 2 см/с^2? ($x(t)$ — перемещение в сантиметрах, t — время в секундах.)

272. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{t^3}{6} + 3t^2 - 5$ (время измеряется в секундах, координата — в метрах). Найдите: а) момент времени t, когда ускорение точки равно нулю; б) скорость движения точки в этот момент.

273. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \sqrt{t}$. Покажите, что ее ускорение пропорционально кубу скорости.

274. Найдите силу F, действующую на материальную точку с массой m, движущуюся прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 - t^2$ при $t = 2$.

275. Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 + t + 1$. Координата x измеряется в сантиметрах, время t — в секундах. Найдите: а) действующую силу; б) кинетическую энергию E тела через 2 с после начала движения.

276. Известно, что для любой точки C стержня AB длиной 20 см,

отстоящей от точки A на расстояние l, масса куска стержня AC в граммах определяется по формуле $m(l)=3l^2+5l$. Найдите линейную плотность стержня: а) в середине отрезка AB; б) в конце B стержня.

277. По прямой движутся две материальные точки по законам $x_1(t)=4t^2-3$ и $x_2(t)=t^3$. В каком промежутке времени скорость первой точки больше скорости второй точки?

278. Из пункта O по двум лучам, угол между которыми 60°, движутся два тела: первое — равномерно со скоростью 5 км/ч, второе — по закону $s(t)=2t^2+t$. С какой скоростью они удаляются друг от друга? (s измеряется в километрах, t — в секундах.)

§ 6. ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

22. Признак возрастания (убывания) функции

В п. 6 вы видели, что одна из основных задач исследования функции — это нахождение промежутков ее возрастания и убывания. Такое исследование легко провести с помощью производной. Сформулируем соответствующие утверждения.

Достаточный признак возрастания функции. ***Если $f'(x)>0$ в каждой точке интервала I, то функция f возрастает на I.***

Достаточный признак убывания функции. ***Если $f'(x)<0$ в каждой точке интервала I, то функция f убывает на I.***

Доказательство этих признаков проводится на основании формулы Лагранжа (см. п. 19). Возьмем два любых числа x_1 и x_2 из интервала. Пусть $x_1<x_2$. По формуле Лагранжа существует число $c\in(x_1; x_2)$, такое, что

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c). \qquad (1)$$

Число c принадлежит интервалу I, так как точки x_1 и x_2 принадлежат I. Если $f'(x)>0$ для $x\in I$, то $f'(c)>0$, и поэтому $f(x_1)<f(x_2)$ — это следует из формулы (1), так как $x_2-x_1>0$. Этим доказано возрастание функции f на I. Если же $f'(x)<0$ для $x\in I$, то $f'(c)<0$, и потому $f(x_1)>f(x_2)$ — следует из формулы (1), так как $x_2-x_1>0$. Доказано убывание функции f на I.

▽ Наглядный смысл признаков ясен из физических рассуждений (рассмотрим для определенности признак возрастания).

Пусть движущаяся по оси ординат точка в момент времени t имеет ординату $y=f(t)$. Тогда скорость этой точки в момент времени t равна $f'(t)$ (см. п. 21). Если $f'(t)>0$ в каждый момент времени из промежутка I, то точка движется в положительном направлении оси ординат, т. е. если $t_1<t_2$, то $f(t_1)<f(t_2)$. Это означает, что функция f возрастает на промежутке I. ▲

○ Пример 1. Найдем промежутки возрастания (убывания) и построим график функции $f(x)=x-x^3$.

Данная функция определена на множестве всех действительных чисел. Из равенства $f'(x)=1-3x^2$ следует, что $f'(x)>0$, если $1-3x^2>0$. Решая это неравенство методом интервалов (рис. 101, *а*), получим, что $f'(x)>0$ на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, и, значит, на этом интервале f возрастает.

Аналогично $f'(x)<0$ на интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty\right)$, поэтому на этих интервалах f убывает. Далее вычислим значения f в точках $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=-\frac{2}{3\sqrt{3}}; \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

На координатной плоскости отметим точки $M\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ и $N\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ и нарисуем проходящий через них график функции, возрастающей на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и убывающей на интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty\right)$ (рис. 101, *б*).

Из рисунка видно, что функция f, непрерывная в точках $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}$, возрастает на отрезке $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ и убывает на промежутках $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ и $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty\right)$. ●

Замечание 1. Если функция f непрерывна в каком-либо из концов промежутка возрастания (убывания), то эту точку присоединяют к этому промежутку (как точки $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}$ в примере 1).

Мы примем этот факт без доказательства.

Рис. 101

Замечание 2. Для решения неравенств $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$ удобно пользоваться обобщением метода интервалов (теоремой Дарбу): точки, в которых производная равна 0 или не существует, разбивают область определения функции f на промежутки, в каждом из которых f' сохраняет постоянный

знак. (Этот факт доказывается в курсах математического анализа.) Знак можно определить, вычислив значение f' в какой-нибудь точке промежутка.

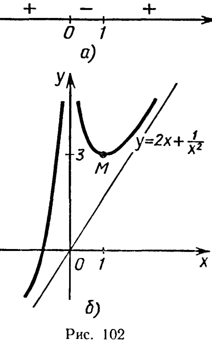


Рис. 102

○ Пример 2. Найдем промежутки возрастания (убывания) и построим график функции $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$.

Область определения данной функции — объединение промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ \infty)$; $f'(x)=2-\frac{2}{x^3}$; $f'(x)=0$ при $x=1$. Точки 0 и 1 разбивают область определения функции на три интервала $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 1)$ и $(1;\ \infty)$. Согласно замечанию 2 в каждом из них f' сохраняет постоянный знак. Знак производной в каждом из этих интервалов отмечен на рисунке 102, *а*.

Следовательно, данная функция возрастает на интервалах $(-\infty;\ 0)$ и $(1;\ \infty)$. Поскольку f непрерывна в точке 1, то эту точку можно (в силу замечания 1) присоединить к промежутку, на котором функция f возрастает.

Окончательно получаем, что f возрастает на промежутке $(-\infty;\ 0)$ и $[1;\ \infty)$. Далее, $f'(x)<0$ на интервале $(0;\ 1)$, и поэтому (с учетом замечания 1) f убывает на промежутке $(0;\ 1]$.

Точка 0 не входит в $D(f)$, однако при стремлении x к 0 слагаемое $\frac{1}{x^2}$ неограниченно возрастает. Поэтому и значения f неограниченно возрастают. В точке 1 функция принимает значение 3.

Отметим теперь на координатной плоскости точку M $(1;\ 3)$ и нарисуем проходящий через нее график функции, возрастающей на промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $[1;\ \infty)$ и убывающей на промежутке $(0;\ 1]$ (рис. 102, *б*).

Пример 3. Найдем промежутки возрастания (убывания) функции

$$f(x)=-2x+\sin x.$$

Функция определена на всей числовой прямой. Производная ее такова:

$$f'(x)=-2+\cos x.$$

Поскольку $|\cos x|\leqslant 1$, легко получаем, что $f'(x)<0$ для всех действительных x. Это значит, что функция $f(x)=-2x+\sin x$ убывает на всей числовой прямой. ●

Упражнения

Найдите промежутки возрастания и убывания функций (279—281).

279. а) $f(x)=3-\frac{1}{2}x$; б) $f(x)=-x^2+2x-3$;

в) $f(x)=4x-5$; г) $f(x)=5x^2-3x+1$.

280. а) $f(x)=-\frac{2}{x}+1$; б) $f(x)=x^2(x-3)$;

в) $f(x)=\frac{x-3}{x}$; г) $f(x)=x^3-27x$.

281. а) $f(x)=12x+3x^2-2x^3$; б) $f(x)=4-x^4$;

в) $f(x)=x(x^2-12)$; г) $f(x)=\frac{3}{x^2}$.

282. Постройте эскиз графика функции f, удовлетворяющей условиям:

а) $D(f)=[-2;\ 5]$, $f'(x)>0$ при $x\in(-2;\ 5)$;
б) $D(f)=[1;\ 6]$, $f'(x)<0$ при $x\in(1;\ 3)\cup(3;\ 6)$, $f'(3)=0$;
в) $D(f)=[-2;\ 5]$, $f'(x)>0$ при $x\in(-2;\ 1)\cup(1;\ 5)$, $f'(1)=0$;
г) $D(f)=[1;\ 6]$, $f'(x)<0$ при $x\in(1;\ 6)$.

Найдите промежутки возрастания и убывания и постройте графики функций (283—284).

283. а) $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$; б) $f(x)=4x^3-1{,}5x^4$;
в) $f(x)=2+9x+3x^2-x^3$; г) $f(x)=x^4-2x^2$.

284. а) $f(x)=2-\frac{4}{0{,}5x-1}$; б) $f(x)=|x-3|-2$;

в) $f(x)=8x^2-x^4$; г) $f(x)=\left|\frac{1}{x}-1\right|$.

285. Докажите, что функция f возрастает на $\boldsymbol{R}$, а функция g убывает на $\boldsymbol{R}$:

а) $f(x)=3x+\cos 2x$; б) $g(x)=-\frac{x^3}{3}-x$;

в) $f(x)=x^7+2x^5+3$; г) $g(x)=-4x+\sin 3x$.

286. Докажите, что уравнение имеет единственный корень на каждом из данных промежутков P_1 и P_2:

а) $x^3-27x+2=0$, $P_1=[-1;\ 1]$, $P_2=[4;\ 6]$;
б) $x^4-4x-9=0$, $P_1=[-2;\ 0]$, $P_2=[2;\ 3]$;
в) $x^4+6x^2-8=0$, $P_1=[-2;\ -1]$, $P_2=[1;\ 2]$;
г) $-1+3x^2-x^3=0$, $P_1=[-2;\ 0]$, $P_2=[2;\ 3]$.

23. Критические точки функции, максимумы и минимумы

Мы рассмотрели поведение функции на промежутках, где $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$. Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* этой функции. Эти точки играют важную роль при построении графика функции, поскольку только они могут быть точками экстремума функции (рис. 103 и 104). Сформулируем соответствующее утверждение, его называют *теоремой Ферма* (в честь французского математика Пьера Ферма).

Необходимое условие экстремума. ***Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f', то она равна нулю: $f'(x_0)=0$.***

Рассмотрим случай $f'(x_0)>0$. По определению производной отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x \to x_0$ стремится к положительному числу $f'(x_0)$, а следовательно, и само будет положительно при всех x, достаточно близких к x_0. Для таких x

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$$

и, значит, $f(x)>f(x_0)$ для всех $x>x_0$ из некоторой окрестности точки x_0. Поэтому x_0 не является точкой максимума.

Если же $x<x_0$, то $f(x)<f(x_0)$, и, следовательно, x_0 не может быть и точкой минимума f.

Случай $f'(x_0)<0$ разбирается аналогично.

Важно отметить, что теорема Ферма есть лишь необходимое условие экстремума: из того, что производная в точке x_0 обращается в нуль, необязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум. Например, производная функции $f(x)=x^3$ обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке функция не имеет (рис. 105).

До сих пор мы рассматривали критические точки, в которых производная равна нулю. Рассмотрим теперь критические точки, в которых производная не существует. (Отметим, что, например,

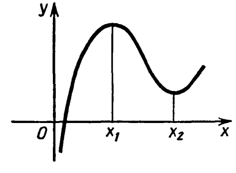


Рис. 103

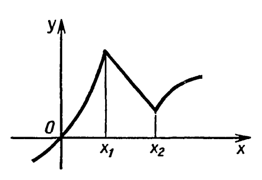


Рис. 104

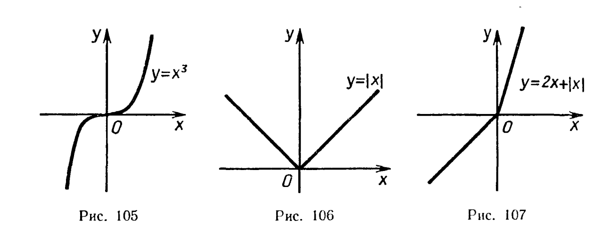


Рис. 105 Рис. 106 Рис. 107

точка 0 для функции $y=\sqrt{x}$ не является критической: в ней производная не существует, но она не внутренняя точка области определения.) В этих точках функция также может иметь или не иметь экстремум.

○ Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x)=|x|$ (рис. 106). Эта функция не имеет производной в 0. Значит, 0 — критическая точка. Очевидно, что в точке 0 функция имеет минимум.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x)=2x+|x|$ (рис. 107). По графику видно, что в точке 0 эта функция не имеет экстремума. В этой точке функция не имеет и производной.

В самом деле, если предположить, что функция f имеет в точке 0 производную, то $f(x)-2x$ также имеет производную в 0. Но $f(x)-2x=|x|$, а функция $|x|$ в точке 0 не дифференцируема (см. п. 18), т. е. мы пришли к противоречию.

Значит, функция f в точке 0 производной не имеет. ●

Из теоремы Ферма следует, что при нахождении точек экстремумов функции требуется в первую очередь найти ее критические точки. Но, как видно из рассмотренных примеров, вопрос о том, действительно ли данная критическая точка есть точка экстремума, требует дополнительного исследования. При этом часто помогают такие достаточные условия существования экстремума в точке.

Признак максимума функции. ***Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x)>0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x)<0$ на интервале $(x_0;\ b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.***

Удобно пользоваться упрощенной формулировкой этого признака: *если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума.*

Доказательство. Производная $f'(x)>0$ на интервале $(a;\ x_0)$, а функция f непрерывна в точке x_0, следовательно (см. п. 22), функция f возрастает на промежутке $(a;\ x_0]$, и потому $f(x)<f(x_0)$ для всех x из интервала $(a;\ x_0)$.

На промежутке $[x_0;\ b)$ функция f убывает (доказательство аналогично), и потому $f(x)<f(x_0)$ для всех x из интервала $(x_0;\ b)$.

Итак, $f(x)<f(x_0)$ для всех $x \neq x_0$ из интервала $(a;\ b)$, т. е. x_0 есть точка максимума функции f.

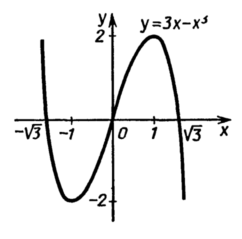


Рис. 108

∇ Признак максимума имеет простой механический смысл. Мы можем считать, что $f(x)$ — это координата точки, движущейся по оси Oy, в момент времени x, а $f'(x)$ — скорость точки в этот момент. По условию скорость точки за промежуток времени, предшествующий x_0, положительна. Поэтому в течение этого времени точка движется в положительном направлении, она поднимается по оси Oy до точки $f(x_0)$, т. е. $f(x)<f(x_0)$ при $x<x_0$. В момент x_0 точка на мгновение «останавливается» (ее скорость в этот момент равна нулю или не определена), а затем начинает опускаться по оси (по условию скорость $f'(x)$ меньше нуля при $x>x_0$), т. е. $f(x)<f(x_0)$. Итак, в окрестности x_0 имеем $f(x)<f(x_0)$. Точка x_0 — точка максимума. ▲

Признак минимума функции. ***Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x)<0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x)>0$ на интервале $(x_0;\ b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции f.***

Удобно пользоваться упрощенной формулировкой этого признака: *если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.*

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака максимума (полезно провести его самостоятельно).

○ Пример 3. Найдем точки экстремума функции

$$f(x)=3x-x^3.$$

Производная этой функции, равная $3-3x^2$, определена во всех точках и обращается в нуль в точках -1 и 1. В точке -1 производная меняет знак с минуса на плюс ($f'(x)<0$ при $x<-1$ и $f'(x)>0$ при $-1<x<1$). В точке 1 производная меняет знак с плюса на минус. Пользуясь признаками максимума и минимума, получаем, что точка -1 является точкой минимума, а точка 1 — точкой максимума функции f. График функции изображен на рисунке 108. ●

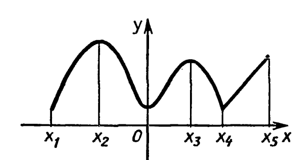
Упражнения

287. Найдите критические точки функции, график которой изображен на рисунке 109.

288. Найдите критические точки функции:

а) $f(x)=4-2x+7x^2$; б) $f(x)=1+\cos 2x$;

в) $f(x)=x-2\sin x$; г) $f(x)=4x-\frac{x^3}{3}$.



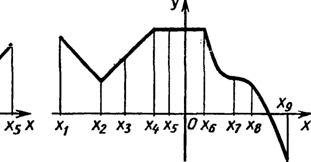
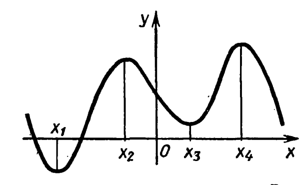


Рис. 109



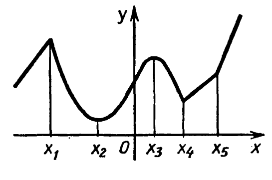


Рис. 110

289. Найдите точки максимума и минимума функции f, график которой изображен на рисунке 110. Существует ли производная в соответствующей точке? Если существует, то чему равно ее значение?

290. Найдите критические точки функции. Определите, какие из них являются точками максимума, а какие — точками минимума:

а) $f(x)=5+12x-x^3$; б) $f(x)=9+8x^2-x^4$;

в) $f(x)=2x^3+3x^2-4$; г) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2$.

291. Докажите, что функция f не имеет критических точек:

а) $f(x)=\sqrt{x}$; б) $f(x)=\operatorname{tg} x$;

в) $f(x)=3x-7$; г) $f(x)=3x^5+2x$.

Найдите критические точки функции f (292—293).

292. а) $f(x)=\sin^2 x-\cos x$; б) $f(x)=2x+\frac{8}{x^2}$;

в) $f(x)=10\cos x+\sin 2x-6x$; г) $f(x)=x^3-4x+8$.

293. а) $f(x)=(x-2)^3$; б) $f(x)=\begin{cases}-x-2 \text{ при } x\leqslant -1,\\ x \text{ при } -1<x<1,\\ 2-x \text{ при } x\geqslant 1;\end{cases}$

в) $f(x)=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$; г) $f(x)=\begin{cases}x+6 \text{ при } x<-2,\\ x^2 \text{ при } -2\leqslant x\leqslant 2,\\ 6-x \text{ при } x>2.\end{cases}$

294. Постройте эскиз графика функции, обладающей следующими свойствами:

а) $D(f)=[-3; 5]$; $f'(x)>0$ при $x\in(-3; 1)$, $f'(x)<0$ при $x\in(1; 5)$ и $f'(1)=0$;

б) $D(f)=[-3; 5]$; $f'(x)<0$ при $x\in(-3; 1)$, $f'(x)>0$ при $x\in(1; 5)$ и функция f не имеет производной в точке 1;

в) $D(f)=[a; b]$; x_1 — точка минимума, x_2 — точка максимума функции, $f(a)>f(b)$;

г) $D(f)=[a; b]$; x_1 — точка максимума, x_2 — точка минимума, $f(a)=f(b)$.

295. Исследуйте функцию на возрастание, убывание и экстремумы. Постройте график функции:

а) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-8x^2$; б) $f(x)=\frac{3x}{1+x^2}$;

в) $f(x)=2x-\frac{1}{6}x^3$; г) $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

24. Примеры применения производной к исследованию функций

Вы уже знаете (п. 4), что построение графика функции лучше начинать с ее исследования, которое состоит в том, что для данной функции: 1) находят ее область определения; 2) выясняют, является ли функция f четной или нечетной, является ли периодической. Далее находят: 3) точки пересечения графика с осями координат; 4) промежутки знакопостоянства; 5) промежутки возрастания и убывания; 6) точки экстремума и значения f в этих точках и 7) исследуют поведение функции в окрестности «особых» точек и при больших по модулю x.

На основании такого исследования строится график функции.

Исследование функции на возрастание (убывание) и на экстремум удобно проводить с помощью производной. Для этого сначала находят производную функции f и ее критические точки, а затем выясняют, какие из них являются точками экстремума.

○ Пример 1. Исследуем функцию $f(x)=3x^5-5x^3+2$ и построим ее график.

Проведем исследование по указанной схеме.

1) $D(f)=\mathbf{R}$, так как f — многочлен.

2) Функция f не является ни четной, ни нечетной (докажите это самостоятельно).

3), 4) График f пересекается с осью ординат в точке $(0; f(0))$; чтобы найти точки пересечения с осью абсцисс, надо решить уравнение $3x^5-5x^3+2=0$, один из корней которого ($x=1$) легко находится. Другие корни (если они есть) могут быть найдены только приближенно. Поэтому для данной функции остальные точки пересечения графика с осью абсцисс и промежутки знакопостоянства

мы находить не будем (как уже отмечалось в п. 4, приведенная схема имеет примерный характер).

5), 6) Найдем производную функции f:

$$f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x^2-1).$$

$D(f')=\boldsymbol{R}$, поэтому критических точек, для которых $f'(x)$ не существует, нет.

Заметим, что $f'(x)=0$, если $x^2(x^2-1)=0$, т. е. при значениях аргумента, равных 0, -1 и 1. Рассматриваемая функция имеет три критические точки.

Составляем таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	2	↘	0	↗
		max				min	

В первой строке этой таблицы указаны в порядке возрастания критические точки функции и ограниченные ими промежутки. Во второй строке отмечены знаки производной на этих промежутках. (На каждом таком интервале знак производной не меняется, его можно найти, определив знак производной в какой-либо точке рассматриваемого интервала.) В третьей строке записаны выводы о ходе изменения данной функции: « ↗ » — возрастает, « ↘ » — убывает, а в четвертой — о виде критических точек (пп. 5 и 6 приведенной выше схемы). Критическая точка 0 функции f не является точкой экстремума, поэтому в четвертой строке таблицы она не отмечена. Заметим, что вывод о ходе изменения функции на промежутке между критическими точками часто можно сделать, сравнив значения функции на концах этого промежутка (вместо определения знака производной). Например, $f(0)<f(-1)$, поэтому на промежутке $(-1; 0)$ функция убывает (и, следовательно, $f'<0$ на этом промежутке).

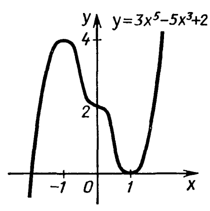


Рис. 111

Строим график функции (рис. 111). Строить его удобно по промежуткам, которые указаны в таблице. Например, в таблице указано, что f убывает на интервале $(0; 1)$. Функция f непрерывна в точках 0 и 1 (так как она непрерывна всюду), следовательно, она убывает на отрезке $[0; 1]$. Поэтому рисуем график убывающим на отрезке $[0; 1]$ от значения $f(0)=2$ до значения $f(1)=0$. При этом касательные к графи-

ку в точках $0, \pm 1$ должны быть горизонтальными — во второй строке таблицы сказано, что в этих точках производная равна нулю. Аналогично строится график и на остальных промежутках.

Пример 2. Найдем число корней уравнения $2x^3 - 3x^2 - 12x - 11 = 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 11$. Ее область определения $D(f) = (-\infty; \infty)$. Для отыскания критических точек функции f найдем ее производную: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Эта производная обращается в нуль в точках $x = -1$ и $x = 2$.

Заполним таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 2)$	2	$(2; \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-4	↘	-31	↗
		max		min	

На промежутке $(-\infty; -1]$ функция возрастает от $-\infty$ до -4, поэтому на этом промежутке уравнение $f(x) = 0$ корней не имеет. На промежутке $[-1; 2]$ уравнение также не имеет корней, так как на этом промежутке f убывает от -4 до -31. Наконец, на промежутке $[2; \infty)$ функция f возрастает от -31 до бесконечности, на этом промежутке уравнение $f(x) = 0$ имеет один корень (по теореме о корне). Итак, уравнение $2x^3 - 3x^2 - 12x - 11 = 0$ имеет один корень и этот корень принадлежит интервалу $(2; \infty)$. ●

Упражнения

Исследуйте функцию и постройте ее график (296—297)

296. а) $f(x) = x^2 - 2x + 8$; б) $f(x) = -\frac{2x^2}{3} + x + \frac{2}{3}$;
в) $f(x) = -x^2 + 5x + 4$; г) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$.

297. а) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$; б) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;
в) $f(x) = x^3 + 3x + 2$; г) $f(x) = 3x^2 - x^3$.

298. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:
а) $f(x) = 1 + 1{,}5x - 3x^2 - 2{,}5x^3$; б) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 6x + 1$;
в) $f(x) = \frac{x^4}{4} + 8x - 5$; г) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x - 2$.

299. Докажите, что функция f возрастает на множестве R:
а) $f(x) = 2x - \cos x$; б) $f(x) = x^5 + 4x$;
в) $f(x) = \sin x + \frac{3x}{2}$; г) $f(x) = 2x^3 + x - 5$.

Исследуйте функцию и постройте ее график (300—302).

300. а) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5$; б) $f(x)=4x^2-x^4$;

в) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-1\frac{1}{3}x^3$; г) $f(x)=5x^3-3x^5$.

301. а) $f(x)=x^2\sqrt{1+x}$; б) $f(x)=\frac{6(x-1)}{x^2+3}$;

в) $f(x)=x\sqrt{2-x}$; г) $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$.

302. а) $f(x)=\sin^2 x+\sin x$; б) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$;

в) $f(x)=\cos^2 x-\cos x$; г) $f(x)=\frac{x}{x-1}$.

303. Докажите, что функция f принимает на данном промежутке положительные значения:

а) $f(x)=\operatorname{tg} x-x$; $I=\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$; $I=[1; \infty)$;

в) $f(x)=x-\sin x$; $I=(0; \infty)$;

г) $f(x)=x+\frac{\pi}{2}-\cos x$; $I=\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

304. Сколько корней имеет уравнение:

а) $4x^3-3x^2-36x-10=0$; б) $\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x=0$;

в) $x^4-4x^3-9=0$; г) $x^2-\frac{x^3}{3}-1=0$?

25. Наибольшее и наименьшее значения функции

Решение многих практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции. В курсах анализа доказывается теорема Вейерштрасса, утверждающая, что *непрерывная на отрезке* $[a; b]$ *функция* f *принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения,* т. е. существуют точки отрезка $[a; b]$, в которых f принимает наибольшее и наименьшее на $[a; b]$ значения.

Для случая, когда функция f не только непрерывна на отрезке $[a; b]$, но имеет на этом отрезке лишь конечное число критических точек, укажем *правило отыскания наибольшего и наименьшего значений* f.

Предположим сначала, что f не имеет на отрезке $[a; b]$ критических точек. Тогда (п. 23) она возрастает (рис. 112) или убывает (рис. 113) на этом отрезке, и, значит, наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке $[a; b]$ — это значения в концах a и b.

Пусть теперь функция f имеет на отрезке $[a; b]$ конечное число критических точек. Эти точки разбивают отрезок $[a; b]$ на конечное число отрезков, внутри которых критических точек нет. Поэтому

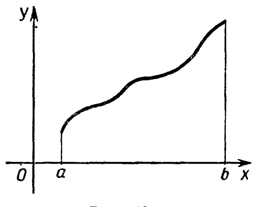


Рис. 112

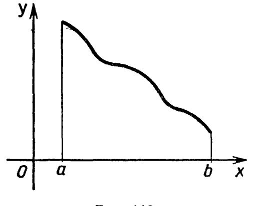


Рис. 113

(см. предыдущий абзац) наибольшее и наименьшее значения функции f на таких отрезках принимаются в их концах, т. е. в критических точках функции или в точках a и b.

Таким образом, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

○ Пример 1. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)=x^3-1{,}5x^2-6x+1$ на отрезке $[-2; 0]$.

Сначала найдем критические точки. Так как производная $y'(x)=3x^2-3x-6$ определена для любого x, остается решить уравнение $y'(x)=0$. Решая его, находим $x=-1$ и $x=2$.

Теперь нужно выбрать наибольшее и наименьшее из чисел $y(-2)=-1$, $y(-1)=4{,}5$ и $y(0)=1$ (критическая точка $x=2$ не принадлежит рассматриваемому отрезку). Ясно, что наименьшее значение достигается в точке -2 и равно -1, а наибольшее — в точке -1 и равно $4{,}5$. Коротко это записывается так:

$$\max_{[-2;\,0]} y(x)=y(-1)=4{,}5; \quad \min_{[-2;\,0]} y(x)=y(-2)=-1. \; ●$$

Изложенный выше метод поиска наибольших и наименьших значений функции применим к решению разнообразных прикладных задач. При этом действуют по следующей схеме:

1) задача «переводится» на язык функций. Для этого выбирают удобный параметр x, через который интересующую нас величину выражают как функцию $f(x)$;

2) средствами анализа ищется наибольшее или наименьшее значение этой функции на некотором промежутке;

3) выясняется, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат.

Вообще решение практических задач средствами математики, как правило, содержит три основных этапа: 1) формализацию (перевод исходной задачи на язык математики); 2) решение полу-



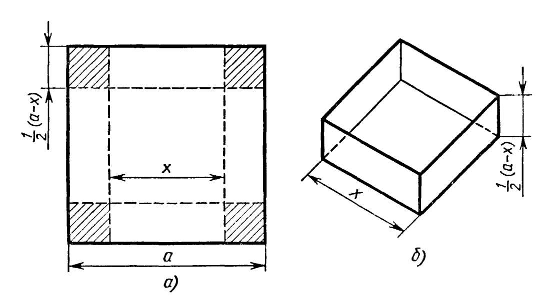


Рис. 114

ченной математической задачи и 3) интерпретацию найденного решения («перевод» его с языка математики в терминах первоначальной задачи).

С этим общим методом (его называют методом математического моделирования) вы уже знакомы, по описанной схеме решались текстовые задачи в курсе алгебры. Приведем пример его применения.

○ Пример 2. Из квадратного листа жести со стороной a надо изготовить открытую сверху коробку, вырезав по углам (рис. 114) квадратики и загнув образовавшиеся кромки. Какой должна быть сторона основания коробки, чтобы ее объем был максимальным?

Решение. 1) Обозначим через x длину стороны основания коробки. Тогда длины сторон вырезанных квадратиков равны $\frac{1}{2}(a-x)$, а объем коробки равен $\frac{1}{2}(a-x)\,x^2$. По смыслу задачи число x удовлетворяет неравенству $0<x<a$, т. е. принадлежит интервалу $(0; a)$. Таким образом, пример 2 мы свели к такой задаче: найти наибольшее значение функции $V(x)=\frac{1}{2}(a-x)\,x^2$ на интервале $(0; a)$.

2) Правило нахождения наименьших и наибольших значений функции было сформулировано для отрезка. Функция V непрерывна на всей числовой прямой. Мы будем искать ее наибольшее значение на отрезке $[0; a]$, потом сделаем выводы для решаемой нами задачи. Находим критические точки функции:

$$V'(x)=ax-\frac{3}{2}x^2,\ ax-\frac{3}{2}x^2=0,\ \text{т. е. } x=0 \text{ или } x=\frac{2}{3}a;$$

$$V\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{1}{2}\left(a-\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{2}{3}a\right)^2=\frac{2}{27}a^3.$$

Так как $V(0)=0$ и $V(a)=0$, своего наибольшего на отрезке $[0; a]$ значения функция V достигает при $x=\frac{2}{3}a$, т. е.

$$\max_{[0;\,a]} V(x)=V\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{2}{27}a^3.$$

Наибольшее значение функции достигается внутри отрезка $[0; a]$, следовательно, и внутри интервала $(0; a)$.

3) Остается вспомнить, что x — длина стороны основания коробки, имеющей при заданных условиях максимально возможный объем. Полученный результат означает, что максимальный объем имеет коробка со стороной основания $\frac{2}{3}a$. ●

Упражнения

305. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f:

а) $f(x)=x^4-8x^2-9$ на промежутках $[-1; 1]$ и $[0; 3]$;

б) $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$ на промежутках $[-4; -1]$ и $[1; 3]$;

в) $f(x)=3x^5-5x^3$ на промежутках $[0; 2]$ и $[2; 3]$;

г) $f(x)=\frac{x}{x+1}$ на промежутках $[-3; -2]$ и $[1; 5]$.

306. Сравните наибольшее значение функции на промежутке P_1 и наименьшее ее значение на промежутке P_2:

а) $f(x)=x^3+3x^2-9x$; $P_1=[-4; 0]$, $P_2=[3; 4]$;

б) $f(x)=x^4-2x^2+4$; $P_1=\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $P_2=[2; 3]$.

307. Материальная точка движется по прямой согласно закону $s(t)=12t^2-\frac{2}{3}t^3$, где $s(t)$ — путь в метрах и t — время в секундах. В какой момент времени из промежутка $[4; 10]$ скорость движения точки будет наибольшей и какова величина этой скорости?

308. Найдите значения аргумента из промежутка $[-2; 5]$, при которых скорость изменения функции $f(x)=21x+2x^2-\frac{x^3}{3}$ будет наибольшей или наименьшей.

309. Скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, изменяется по закону $v(t)=\frac{1}{6}t^3-12t$ (скорость измеряется в метрах в секунду). В какой момент времени ускорение движения будет наименьшим, если движение рассматривать за промежуток от $t_1=10$ с до $t_2=50$ с?

310. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на данном промежутке:

а) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$, $[0;\ 2\pi]$; б) $f(x)=1{,}5x^2+\frac{81}{x}$, $[1;\ 4]$;

в) $f(x)=2\sin x+\sin 2x$, $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

г) $f(x)=x+\frac{1}{x+2}$, $[-5;\ -2{,}5]$.

311. Число 24 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

312. Число 4 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение этих чисел было наибольшим.

313. Кусок проволоки длиной 48 м сгибают так, чтобы образовался прямоугольник. Какую длину должны иметь стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

314. Число 54 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых, два из которых пропорциональны числам 1 и 2, таким образом, чтобы произведение всех слагаемых было наибольшим.

315. Число 16 представьте в виде произведения двух положительных чисел, сумма квадратов которых будет наименьшей.

316. Площадь прямоугольника 64 см^2. Какую длину должны иметь его стороны, чтобы периметр был наименьшим?

317. Открытый бак, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать 13,5 л жидкости. При каких размерах бака на его изготовление потребуется наименьшее количество металла?

318. В равнобедренный треугольник с основанием 60 см и боковой стороной 50 см вписан прямоугольник наибольшей площади. Две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Найдите длины сторон прямоугольника.

319. Из круглого бревна вырезают балку с прямоугольным сечением наибольшей площади. Найдите размеры сечения балки, если радиус сечения бревна равен 20 см.

320. Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в населенный пункт, расположенный по шоссе в 15 км от упомянутой точки (считаем шоссе прямолинейным). Скорость курьера на велосипеде по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч. К какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь населенного пункта?

321. Лодка находится на озере на расстоянии 3 км от ближайшей точки A берега. Пассажир лодки желает достигнуть села B, находящегося на берегу на расстоянии 5 км от A (участок AB

берега считаем прямолинейным). Лодка движется со скоростью 4 км/ч, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы пассажир достиг села в кратчайшее время?

322. Найдите число, сумма которого со своим квадратом принимает наименьшее значение.

323. Докажите, что из всех прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

324. Из всех прямоугольников, вписанных в окружность, найдите прямоугольник наибольшей площади.

325. Покажите, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Сведения из истории

1. О происхождении терминов и обозначений. Раздел математики, в котором изучаются производные и их применения к исследованию функций, называется *дифференциальным исчислением*. Приращения вида Δf, представляющие собой разности, играют заметную роль при работе с производными. Естественно поэтому появление латинского корня differentia (разность) в названии calculis differentialis нового исчисления, которое переводится как *исчислéние разностей*; это название появилось уже в конце XVII в., т. е. при рождении нового метода.

Термин «производная» является буквальным переводом на русский французского слова derivée, которое ввел в 1797 г. Ж. Лагранж (1736—1813); он же ввел современные обозначения y', f'. Такое название отражает смысл понятия: функция $f'(x)$ происходит из $f(x)$, является производным от $f(x)$. И. Ньютон называл производную функцию *флюксией*, а саму функцию — *флюентой*. Г. Лейбниц говорил о *дифференциальном отношении* и обозначал производную как $\frac{df}{dx}$. Это обозначение также часто встречается в современной литературе.

Символ df Лейбниц выбрал для обозначения *дифференциала* функции f. Дифференциал df функции f — это произведение производной $f'(x_0)$ на приращение Δx, т. е. $df=f'(x_0)\,\Delta x$; заменяя обозначение Δx на dx, это же можно записать так: $df=f'(x_0)dx$, откуда $f'(x_0)=\frac{df}{dx}$. Геометрический смысл дифференциала ясен из рассмотрения рисунка 115: здесь $df=AB$, прямая l — касательная к графику.

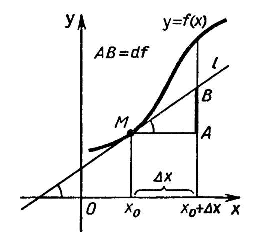


Рис. 115



Лейбниц Готфрид Фридрих

(1646—1716) —

великий немецкий ученый. Философ, математик, физик, юрист, языковед. Создатель (наряду с Ньютоном) математического анализа. Основоположник большой математической школы. Идеи Лейбница оказали значительное влияние на развитие математической логики.

Рассказ о происхождении терминологии, принятой в дифференциальном исчислении, был бы не полон без понятия *предела* и *бесконечно малой*. Подробнее о пределе говорится ниже, а пока заметим, что, например, производная определяется во всех руководствах именно как предел. Пишут $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ вместо принятого выше обозначения $\frac{\Delta f}{\Delta x}\to f'(x_0)$ при $\Delta x\to 0$.

Обозначение lim — сокращение латинского слова *limes* (межа, граница); уменьшая, например, Δx, мы устремляем значения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ к «границе» $f'(x_0)$. Термин «предел» ввел Ньютон.

Примером бесконечно малой может служить функция $(\Delta x)^2$ от Δx, поскольку $(\Delta x)^2\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Вообще, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, говорят, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая. Бесконечно малые играют важную роль в математическом анализе, который поэтому часто называют также анализом бесконечно малых.

Заметим наконец, что слово «экстремум» происходит от латинского extremum (крайний). Maximum переводится как наибольший, а minimum — наименьший.

2. Из истории дифференциального исчисления.

1) Дифференциальное исчисление создано Ньютоном и Лейбницем сравнительно недавно, в конце XVII столетия. Тем более поразительно, что задолго до этого Архимед не только решил задачу на построение касательной к такой сложной кривой, как спираль (применяя при этом предельные переходы), но и сумел найти максимум функции $f(x)=x^2(a-x)$.

Эпизодически понятие касательной (которое, как вы знаете,

Ферма Пьер

(1601—1665) —

французский математик и юрист. Один из крупнейших математиков своего времени. Ферма принадлежат блестящие работы в области теории чисел. Создатель аналитической геометрии, в которой он получил ряд крупных результатов.



связано с понятием производной) встречалось в работах итальянского математика Н. Тартальи (ок. 1500—1557) — здесь касательная появилась в ходе изучения вопроса об угле наклона орудия, при котором обеспечивается наибольшая дальность полета снаряда. И. Кеплер рассматривал касательную в ходе решения задачи о наибольшем объеме параллелепипеда, вписанного в шар данного радиуса.

В XVII в. на основе учения Г. Галилея о движении активно развилась кинематическая концепция производной. Различные варианты изложения, примененные к разным задачам, встречаются уже у Р. Декарта, французского математика Роберваля (1602—1675), английского ученого Д. Грегори (1638—1675), в работах И. Барроу (1630—1677) и, наконец, И. Ньютона.

К рассмотрению касательной и *нормали* (так называется прямая, перпендикулярная касательной и проведенная в точке касания) Декарт пришел в ходе изучения оптических свойств линз. С помощью методов аналитической геометрии и изобретенного им *метода неопределенных коэффициентов* он сумел решить задачи о построении нормалей к ряду кривых, в том числе эллипсу.

В 1629 г. П. Ферма предложил правила нахождения экстремумов многочленов. Существенно подчеркнуть, что фактически при выводе этих правил Ферма активно применял предельные переходы, располагая простейшим дифференциальным условием максимума и минимума.

Ферма сыграл выдающуюся роль в развитии математики. Его имя заслуженно носит не только известная вам теорема из анализа. Великая теорема Ферма («Уравнение $x^n+y^n=z^n$ не имеет решений в натуральных числах при натуральном n, большем двух»), не доказанная, правда, и поныне, лишь один из итогов его размышлений над проблемами теории чисел. Ферма один из



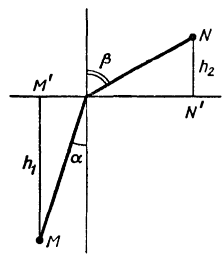


Рис. 116

создателей аналитической геометрии. Он занимался и оптикой. Широко известен принцип Ферма («Луч света распространяется так, что время его прохождения будет наименьшим»), применяемый и в современной физике.

Важные следствия этого принципа вы можете вывести самостоятельно. Закон отражения света («Угол отражения равен углу падения») сводится согласно принципу Ферма к решению известной геометрической задачи. Для вывода *закона преломления света* вам потребуется применить известные правила нахождения экстремума. (Требуется решить такую задачу (рис. 116): «Луч света проходит из точки M нижней полуплоскости в точку N верхней. Скорость света в нижней полуплоскости (однородной среде) постоянна и равна v_1, а в верхней полуплоскости — v_2. По какому пути должна двигаться точка, чтобы весь ее путь занял наименьшее время?»)

Систематическое учение о производных развито Лейбницем и Ньютоном, который сформулировал и две основные проблемы анализа:

«1. Длина проходимого пути постоянно (т. е. в любой момент времени) дана; требуется найти скорость движения в предложенное время.

2. Скорость движения постоянно дана; требуется найти длину пройденного в предложенное время пути».

Первая проблема задает программу развития дифференциального исчисления, с элементами которого вы уже познакомились в этой главе. Вторая относится к интегральному исчислению (см. главу III).

Если Ньютон исходил в основном из задач механики (ньютонов анализ создавался одновременно с ньютоновой классической механикой), то Лейбниц по преимуществу исходил из геометрических задач.

Говоря о последующем развитии идей анализа (а они очень быстро завоевали популярность и нашли многих последователей), следует в первую очередь назвать имена учеников Лейбница — братьев Я. и И. Бернулли.

А. Лопиталь (1661—1704), который учился у И. Бернулли, издал уже в 1696 г. первый печатный курс дифференциального исчисления «Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий», способствовавший распространению новых методов.

Ряд крупных результатов получил Лагранж, его работы сыграли важную роль в осмыслении основ анализа.

Как и в случае многих других разделов математики, неоценим вклад в развитие математического анализа, внесенный Л. Эйлером и К. Ф. Гауссом (1777—1855).

В кратком очерке невозможно рассказать о существе открытий, сделанных в XVIII в. и позднее. Но об одном направлении нельзя не упомянуть. Речь идет о разложении функций в степенные ряды, т. е. о представлении функций в виде многочленов с бесконечным числом слагаемых. С примером бесконечной суммы (числового ряда) вы знакомы: бесконечные периодические дроби представлялись в виде суммы бесконечного числа слагаемых. С числовыми и функциональными рядами работал не только Ньютон, но и его предшественники, и поэтому несколько несправедливо название *формула Тэйлора* (Б. Тэйлор (1685—1731) — английский математик, опубликовавший ее в 1715 г.), принятое для следующего замечательного соотношения:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n+\ldots$$

(здесь $f^{(n)}(x_0)$ — значение, полученное n-кратным дифференцированием функции f в точке x_0, а $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$). Зная формулы производных, например, для функций $\sin x$ и $\cos x$, вы можете разложить их в ряд Тэйлора самостоятельно.

Оказалось, что в ряде случаев, отбрасывая бесконечное число слагаемых, можно получать формулы, дающие хорошие приближения функций многочленами.

2) Энтузиазм, вызванный появлением нового мощного метода, позволяющего решать широкий круг задач, способствовал бурному развитию анализа в XVIII в. Но к концу этого столетия проблемы, возникшие уже у создателей дифференциального и интегрального исчислений, проявились весьма остро.

Основная трудность состояла в том, что точные определения таких ключевых понятий, как *предел*, *непрерывность*, *действительное число*, отсутствовали (соответственно и рассуждения содержали логические пробелы, а иногда были даже ошибочны). Характерный пример — определение непрерывности. Эйлер, Лагранж и даже Фурье (а он работал уже в начале XIX в.) называли непрерывной функцию, которая в своей области определения задана одним аналитическим выражением.

Тем самым «новая» математика не отвечала стандартам строгости, привычным для ученых, воспитанных на классических образцах греческих математиков. Интуиция, столь необходимая математикам, существенно опередила логику, тоже являющуюся неотъемлемой характеристикой математической науки. Гениальная интуиция таких гигантов, как Ньютон, Лейбниц, Эйлер, помогала им избегать ошибок. Но необходимы были прочные логические основы.

Характерны два высказывания, относящиеся к XVIII столетию. Известный математик М. Ролль писал, что новое исчисле-



Коши Огюстен Луи

(1789—1857) —

крупный французский математик. Доказал ряд замечательных теорем в области анализа, теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений и т. д. Большая заслуга Коши — разработка курса анализа, в котором, в частности, он предложил ставшие классическими определения предела, непрерывности функции и т. п.

ние есть коллекция гениальных ошибок. А великий французский мыслитель Вольтер заметил, что это исчисление представляет собой искусство вычислять и точно измерять вещи, существование которых не может быть доказано.

Решительный шаг к созданию прочного фундамента анализа был сделан в 20-е годы прошлого века французским математиком О. Коши (1789—1857), предложившим точные определения пределов функции и последовательности и на их основе доказавшим многие фундаментальные теоремы анализа. Несколько раньше (1821 г.) определения предела и непрерывности, целый ряд других замечательных результатов (в том числе знаменитый пример функции, непрерывной на промежутке, но не имеющей производной ни в одной его точке) получил чешский математик Б. Больцано (1781—1848), но его работы стали известны много позднее.

Определение предела функции по Коши формулируется так: «Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a (т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$), если для любого числа $\varepsilon>0$ можно подобрать такое число $\delta>0$, что $|f(x)-A|<\varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$».

Опираясь на это определение, уже нетрудно дать определение непрерывности в точке: функция f непрерывна в точке x_0 если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Формулировка определения предела последовательности (а именно с этим понятием связано определение интеграла — см. п. 30) такова: «Число A является *пределом последовательности* a_n, если для любого $\varepsilon>0$ существует номер N, такой, что при всех $n>N$ верно неравенство $|a_n-A|<\varepsilon$».

Коши доказал следующие теоремы о пределах, которыми мы

фактически пользовались (называя их правилами предельных переходов — п. 14) при вычислении производных:

Если $\lim_{x\to a} f(x)=A$ *и* $\lim_{x\to a} g(x)=B$, *то существуют пределы суммы и разности, произведения, частного (при* $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$*), причем*

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B,$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\,g(x))=A\cdot B,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}.$$

Приведем пример доказательства «по Коши» (часто говорят: «на языке эпсилон-дельта»). Докажем теорему о пределе суммы.

Возьмем любое положительное число $\varepsilon>0$. Тогда число $\frac{\varepsilon}{2}>0$, и поэтому (по определению Коши):

1) из условия $\lim_{x\to a} f(x)=A$ следует, что можно подобрать число δ_1, такое, что

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta_1$;

2) из условия $\lim_{x\to a} g(x)=B$ вытекает: существует такое $\delta_2>0$, что

$$|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta_2$.

Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда для любого x, удовлетворяющего неравенству $0<|x-a|<\delta$, выполнены неравенства (1) и (2); для этих x имеем:

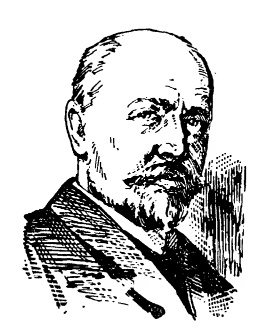
$$|f(x)+g(x)-(A+B)|=|(f(x)-A)+(g(x)-B)|\leqslant|f(x)-A|+$$
$$+|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Этим доказано, что $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B$.

Остальные правила (для произведения и частного) доказываются аналогично.

Яркие характеристики глубины переворота в математике, происшедшего в XVII в., дали Карл Маркс и Фридрих Энгельс. Начальный период развития новых ветвей математики, связанных с понятиями функции, бесконечно малых величин, пределов и производных, был охарактеризован Марксом как «мистический».

Лозунгом многих математиков XVII в. был: «Двигайтесь вперед, и вера в правильность результатов к вам придет».



Кантор Георг

(1845—1918) —

немецкий математик, идеи и работы которого оказали большое влияние на развитие математики в целом, на понимание ее основ. Создатель теории множеств. Получил ряд замечательных результатов, относящихся к теории бесконечных множеств, теории действительного числа.

---

3. О понятии действительного числа. Математический анализ возник в XVIII в. Но полное его обоснование было дано лишь в конце XIX столетия, когда вслед за теорией пределов, созданной Коши, сразу в нескольких формах немецкими математиками Р. Дедекиндом (1831—1916), К. Вейерштрассом (1815—1897) и Г. Кантором (1845—1918) была построена теория действительного числа.

Первые представления о числах складывались постепенно под влиянием практики. С давних пор числа употреблялись при счете и измерении величин.

Ответ на вопрос: «Сколько элементов содержит данное конечное множество?» — всегда выражается либо натуральным числом, либо числом нуль. Следовательно, множество

$$\{0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$$

всех неотрицательных чисел обслуживает все потребности счета.

Иначе обстоит дело с измерением величин. Расстояние между двумя пунктами может равняться 3,5 километра, площадь комнаты — 16,45 квадратного метра и т. д.

Величины бывают разных родов. Приведем два примера.

1. Расстояния между точками, длины отрезков, ломаных и кривых линий — это величины одного и того же рода. Их выражают в сантиметрах, метрах, километрах и т. д.

2. Длительности промежутков времени тоже величины одного и того же рода. Их выражают в секундах, минутах, часах и т. д.

Величины одного и того же рода можно *сравнивать* между собой и *складывать*:

1 м $>$ 90 см	350 м $+$ 650 м $=$ 1 км
300 с $<$ 1 ч	2 ч $+$ 3 ч $=$ 5 ч
1 кг $>$ 720 г	500 г $+$ 500 г $=$ 1 кг

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815—1897) — немецкий математик, доказавший классические теоремы в различных областях математики. Работы Вейерштрасса по обоснованию математического анализа, по существу, завершают создание строгой стройной теории.



Но бессмысленно спрашивать, что больше: 1 метр или 1 час, и нельзя сложить 1 метр с 30 секундами. Длительность промежутков времени и расстояние — величины разного рода. Складывать и сравнивать величины разного рода нельзя.

Величины можно умножать на положительные числа и нуль. В результате умножения величины a на неотрицательное число x получается величина $b = xa$ того же рода. Приведем несколько примеров:

$$5 \cdot 20 \text{ см} = 100 \text{ см} = 1 \text{ м}$$
$$0{,}01 \cdot 20 \text{ см} = 0{,}2 \text{ см} = 2 \text{ мм}$$
$$0 \cdot 20 \text{ см} = 0 \text{ см}$$

Приняв какую-либо величину e за единицу измерения, можно с ее помощью измерять любую другую величину a того же рода. В результате измерения получим, что $a = xe$, где x — число.

Это число x называется числовым значением величины a при единице измерения e. Числовое значение величины зависит от выбора единицы измерения. Если, например, длина комнаты имеет числовое значение 5,6 при единице измерения в 1 м ($e = 1$ м), то эта же длина имеет числовое значение 560 при единице измерения в 1 см ($e = 1$ см).

Пусть числовые значения величин a и b при одной и той же единице измерения e равны x и y, т. е. $a = xe$, $b = ye$. Если $b \neq 0$, то отношение $\frac{x}{y}$ называют *отношением величины a к b*.

Таковы простейшие сведения о величинах. Приведенное описание понятия величины опиралось на понятие числа. Но исторический путь был иным: положительные действительные числа появились как отношения величин (а точнее, как отношения длин отрезков).

С открытием несоизмеримости диагонали единичного квадрата с его стороной стало ясно, что отношение длин отрезков не всегда может быть выражено не только натуральным, но и рациональным числом. Для того чтобы числовое значение каждого отрезка при фиксированной единице измерения было определено, требовалось введение новых чисел — иррациональных.

Все практические измерения величин имеют лишь приближенный характер. Их результат с требуемой точностью можно выразить при помощи рациональных дробей или более специальным образом — при помощи конечных десятичных дробей. Например, измеряя диагональ квадрата со стороной 1 м с точностью до одного сантиметра, мы обнаружим, что ее длина приближенно равна 1,41 м. При измерении с точностью до одного миллиметра получим, что эта длина приближенно равна 1,414 м.

Но в математике часто отвлекаются от приближенного характера практических измерений. Последовательный теоретический подход к измерению длин отрезков приводит к необходимости рассмотрения бесконечных десятичных дробей. (Именно такие дроби представляют числа $\frac{2}{3}=0{,}666...$, $\sqrt{2}=1{,}41421356...$, $\pi=3{,}14159265...$.)

Отношение длины любого отрезка к длине отрезка, принятого за единицу измерения, всегда может быть выражено числом, представляемым в виде бесконечной десятичной дроби.

Полная теория действительных чисел довольно сложна и не входит в программу средней школы. Но с одним из способов ее построения мы познакомимся в общих чертах.

1. Принимают:

а) каждому действительному числу соответствует (в качестве его записи) бесконечная десятичная дробь:

$$x=a_0{,}a_1a_2a_3\ \dots\ a_n\ \dots\ ;$$

б) каждая бесконечная десятичная дробь является записью действительного числа.

Но при этом естественно считать десятичную дробь заканчивающуюся бесконечной последовательностью девяток, лишь второй записью числа, выражающегося десятичной дробью, заканчивающейся бесконечной последовательностью нулей:

$$0{,}9999...=1{,}0000...;\ 12{,}765999...=12{,}766000...\ .$$

Такое соглашение поясним примером:

$$0{,}(9)=3\cdot0{,}(3)=3\cdot\frac{1}{3}=1.$$

Только исключив из рассмотрения десятичные дроби с девяткой в периоде, получаем взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством бесконечных десятичных дробей.

Число a_0 — это *целая часть* положительного числа x, а

$$x - a_0 = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots -$$

дробная часть числа x.

Число $x_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ называют *десятичным приближением x с точностью до 10^{-n} по недостатку*, а число $x'_n = x_n + 10^{-n}$ называют *десятичным приближением с точностью до 10^{-n} по избытку* для числа $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$.

Если число x отрицательно, т. е.

$$x = -a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots ,$$

то полагают

$$x'_n = -a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \text{ и}$$
$$x_n = x'_n - 10^{-n}.$$

2. Вводят *правило сравнения* двух действительных чисел. По определению число x меньше числа y, если хотя бы при одном n выполнено неравенство $x_n < y_n$, где x_n и y_n — десятичные приближения с точностью до 10^{-n} по недостатку для чисел x и y. (Мы воспользовались тем, что правило сравнения конечных десятичных дробей уже известно.)

3. Определяют *арифметические действия* над действительными числами (при этом также пользуются тем, что эти действия уже определены для конечных десятичных дробей).

Суммой двух десятичных чисел x и y (обозначается $x+y$) называют такое действительное число z, что при любом n выполнены неравенства

$$x_n + y_n \leqslant x + y < x'_n + y'_n.$$

В курсах математического анализа доказывается, что такое число существует и определяется единственным образом.

Аналогично *произведением* двух неотрицательных чисел x и y называют такое число z (обозначается xy), что при любом n выполнены неравенства

$$x_n y_n \leqslant xy < x'_n\, y'_n.$$

Такое число существует и определяется однозначно. Для действительных чисел разных знаков, воспользовавшись тем, что произведение неотрицательных чисел $|x|$ и $|y|$ уже определено, полагают $xy = -|x|\,|y|$; в остальных случаях $xy = |x|\,|y|$. (Как обычно, модулем каждого из чисел

$$a_0,\ a_1 a_2 \dots a_n \dots \text{ и } -a_0,\ a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

называют число $a_0,\ a_1 a_2 \dots a_n \dots$.)

Вычитание определяется как действие, обратное сложению: *разностью* $x - y$ чисел x и y называется такое число z, что $y + z = x$, а деление — как действие, обратное умножению: *частным* $x : y$ называется такое число z, что $yz = x$.

4. Показывают, что неравенства и арифметические операции, определенные указанным в п. 3 образом, сохраняют основные свойства, присущие им в множестве рациональных чисел.

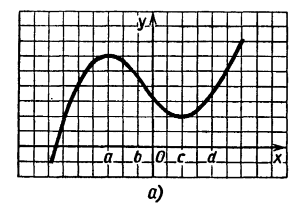
Вопросы и задачи на повторение

1. 1) Что такое приращение аргумента и приращение функции?
2) В чем состоит геометрический смысл приращений Δx и Δf? отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$?
3) Выразите $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ через x_0 и Δx:
а) $f(x)=x^2-x$; б) $f(x)=x^3+2$; в) $f(x)=3x-1$; г) $f(x)=\frac{2}{x}$.

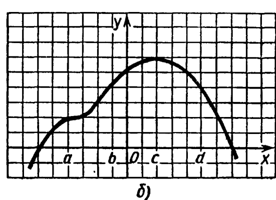
2. 1) Сформулируйте определение производной функции в точке.
2) Пользуясь определением, найдите производную функции f в точке x_0:
а) $f(x)=x^2+1$, $x_0=-2$; б) $f(x)=\frac{2}{x}$, $x_0=3$;
в) $f(x)=2x-1$, $x_0=-4$; г) $f(x)=x^3$, $x_0=2$.

3. 1) Сформулируйте правила вычисления производных. Чему равна производная функции $f(x)=x^n$ (n — целое число)?
2) Дифференцируемая функция f задана графиком (рис. 117). Постройте касательные к графику f в указанных точках и найдите приближенные значения производной в точках a, b, c, d.
3) Продифференцируйте функцию:
а) $f(x)=(x+2)\sin x$; б) $f(x)=\frac{4}{(9+7x)^5}$;
в) $f(x)=x^3-\frac{2}{x}+\cos 3x$; г) $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$.

4. 1) Какую функцию называют непрерывной на промежутке?
2) Найдите промежутки непрерывности функции:



а)



б)

Рис. 117

а) $f(x)=\frac{x^3-2x^2-5}{4-x^2}$; б) $f(x)=1-2\operatorname{tg} x$;

в) $f(x)=\frac{x-4}{x^2-3x-10}$; г) $f(x)=x^4-3x^2+7$.

3) Решите неравенство методом интервалов:

а) $\frac{4}{x+4}+\frac{1}{x+1}>1$; б) $x^4-15x^2-16\leqslant 0$;

в) $\frac{x^2-3x-4}{x-4}\leqslant 0$; г) $(x-1)(x-2)(x+4)\geqslant 0$.

5. 1) Какую прямую называют касательной к графику функции f в точке $(x_0;\ f(x_0))$?

2) В чем состоит геометрический смысл производной?

3) Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0;\ f(x_0))$:

а) $f(x)=\cos x,\ x_0=\frac{2\pi}{3}$; б) $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=2$;

в) $f(x)=\sin x,\ x_0=\pi$; г) $f(x)=x^2,\ x_0=-\frac{1}{2}$.

6. 1) Запишите общую формулу для приближенного вычисления значения функции, дифференцируемой в точке x_0.

2) Выпишите формулы для приближенного вычисления значений функции:

а) $f(x)=x^n$; б) $f(x)=\cos x$; в) $f(x)=\sqrt{x}$; г) $f(x)=\frac{1}{x}$.

3) Вычислите приближенные значения:

а) $\frac{1}{1{,}001^{10}}$; б) $\sin 59°$; в) $\sqrt{9{,}009}$; г) $0{,}999^{15}$.

7. 1) В чем состоит механический смысл производной?

2) Тело движется по прямой согласно закону $x(t)$. Запишите формулы для нахождения скорости и ускорения тела в момент времени t.

3) Найдите скорость и ускорение точки в момент t_0, если:

а) $x(t)=t^3-2t^2+5,\ t_0=4$; б) $x(t)=3\cos 2t,\ t_0=\frac{\pi}{3}$;

в) $x(t)=5t-t^2,\ t_0=2$; г) $x(t)=2t^2+t-4,\ t_0=4$.

8. 1) Запишите формулу Лагранжа.

2) Сформулируйте признак возрастания (признак убывания) функции.

3) Исследуйте на возрастание и убывание функцию:

а) $y=\frac{x}{x^2+9}$; б) $y=3x-\sin 3x$;

в) $y=x^4-4x$; г) $y=x^2+\frac{16}{x}$.

9. 1) Какую точку называют критической точкой функции?
2) Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.
3) Исследуйте на максимум и минимум функцию:

а) $y=\frac{x}{2}-x^4$; б) $y=2\sin x+\cos 2x$;

в) $y=x^3-3x$; г) $y=x-\operatorname{tg} x$.

10. 1) Опишите схему исследования функции.
2) Исследуйте с помощью производной функцию:

а) $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2$; б) $f(x)=\frac{8}{x}+\frac{x}{2}$;

в) $f(x)=x^3-3x^2-9x$; г) $f(x)=\frac{x}{4-x^2}$.

3) Исследуйте по общей схеме функцию f и постройте ее график:

а) $f(x)=x^2-\frac{2}{x}$; б) $f(x)=x^2(x-2)^2$;

в) $f(x)=2x^2+3x-1$; г) $f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x+1$.

11. 1) Сформулируйте правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
2) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке:

а) $f(x)=0{,}8x^5-4x^3$, $[-1; 2]$; б) $f(x)=x-\sin 2x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $f(x)=3x^2-2x^3$, $[-1; 4]$; г) $f(x)=x^2(6-x)$, $[-1; 5]$.

3) а) Разность двух чисел равна 8. Каковы должны быть эти числа, чтобы произведение куба первого числа на второе было наименьшим?

б) Для стоянки машин выделили площадку прямоугольной формы, примыкающую одной стороной к стене здания. Площадку обнесли с трех сторон металлической сеткой длиной 200 м, и площадь ее при этом оказалась наибольшей. Каковы размеры площадки?

Глава III

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 7. ПЕРВООБРАЗНАЯ

26. Определение первообразной

Вспомним пример из механики. Если в начальный момент времени $t=0$ скорость тела равна 0, т. е. $v(0)=0$, то при свободном падении тело к моменту времени t пройдет путь

$$s(t)=\frac{gt^2}{2}. \tag{1}$$

Формула (1) была найдена Галилеем экспериментально.

Дифференцированием находим скорость:

$$s'(t)=v(t)=gt. \tag{2}$$

Второе дифференцирование дает ускорение:

$$v'(t)=a(t)=g, \tag{3}$$

т. е. ускорение постоянно.

Более типично для механики иное положение: известно ускорение точки $a(t)$ (в нашем случае оно постоянно), требуется найти закон изменения скорости $v(t)$, а также найти координату $s(t)$. Иными словами, по заданной производной $v'(t)$, равной $a(t)$, надо найти $v(t)$, а затем по производной $s'(t)$, равной $v(t)$, найти $s(t)$.

Для решения таких задач служит операция *интегрирования*, обратная операции дифференцирования. С ней мы познакомимся в этой главе.

Определение. **Функция F называется *первообразной* для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка**

$$F'(x)=f(x). \tag{4}$$

○ Пример 1. Функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$ есть первообразная для функции $f(x)=x^2$ на интервале $(-\infty; \infty)$, так как

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{1}{3}(x^3)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x)$$

для всех $x\in(-\infty; \infty)$.

Легко заметить, что $\frac{x^3}{3}+7$ имеет ту же самую производную

x^2 и поэтому также является первообразной для x^2 на $\boldsymbol{R}$. Ясно, что вместо числа 7 можно поставить любую постоянную. Таким образом, мы видим, что задача нахождения первообразной имеет бесконечно много решений. В следующем пункте вы увидите, как найти все эти решения.

Пример 2. Для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на интервале $(0;\ \infty)$ первообразной является функция $F(x)=2\sqrt{x}$, так как

$$F'(x)=(2\sqrt{x})'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$$

для всех x из этого интервала. Так же как и в примере 1, функция $F(x)=2\sqrt{x}+C$ при любой постоянной C есть первообразная для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на том же интервале $(0;\ \infty)$.

Пример 3. Функция $F(x)=\frac{1}{x}$ не является первообразной для функции $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ на промежутке $(-\infty;\ \infty)$, так как равенство $F'(x)=f(x)$ не выполнено в точке 0. Однако в каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ \infty)$ функция F является первообразной для f. ●

Упражнения

326. Докажите, что функция F есть первообразная для функции f на указанном промежутке:

а) $F(x)=x^5,\ f(x)=5x^4,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;
б) $F(x)=x^{-3},\ f(x)=-3x^{-4},\ x\in(0;\ \infty)$;
в) $F(x)=\frac{1}{7}x^7,\ f(x)=x^6,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;
г) $F(x)=-\frac{1}{6}x^{-6},\ f(x)=x^{-7},\ x\in(0;\ \infty)$.

327. Является ли функция F первообразной для функции f на указанном промежутке:

а) $F(x)=3-\sin x,\ f(x)=\cos x,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;
б) $F(x)=5-x^4,\ f(x)=-4x^3,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;
в) $F(x)=\cos x-4,\ f(x)=-\sin x,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;
г) $F(x)=x^{-2}+2,\ f(x)=\frac{1}{2x^3},\ x\in(0;\ \infty)$?

Найдите одну из первообразных для функции f на $\boldsymbol{R}$ (328—329).

328. а) $f(x)=3{,}5$; б) $f(x)=\cos x$; в) $f(x)=2x$; г) $f(x)=\sin x$.

329. а) $f(x)=-\sin x$; б) $f(x)=-x$;
в) $f(x)=-4$; г) $f(x)=-\cos x$.

---

330. Докажите, что функция F есть первообразная для функции f на указанном промежутке:

а) $F(x)=\sin^2 x$, $f(x)=\sin 2x$, $x\in \mathbf{R}$;

б) $F(x)=\frac{1}{2}\cos 2x$, $f(x)=-\sin 2x$, $x\in \mathbf{R}$;

в) $F(x)=\sin 3x$, $f(x)=3\cos 3x$, $x\in \mathbf{R}$;

г) $F(x)=3+\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $f(x)=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, $x\in(-\pi;\ \pi)$.

331. Является ли функция F первообразной для функции f на указанном промежутке:

а) $F(x)=2x+\cos\frac{x}{2}$, $f(x)=2-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$, $x\in \mathbf{R}$;

б) $F(x)=\sqrt{4-x^2}$, $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $x\in(-2;\ 2)$;

в) $F(x)=\frac{1}{x^2}$, $f(x)=14-\frac{1}{x^2}$, $x\in(0;\ \infty)$;

г) $F(x)=4x\sqrt{x}$, $f(x)=6\sqrt{x}$, $x\in(0;\ \infty)$?

332. Найдите одну из первообразных для функции f на $\mathbf{R}$:

а) $f(x)=x+2$; б) $f(x)=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$;
в) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$; г) $f(x)=3x^2+1$.

333. Найдите две первообразные для функции f:

а) $f(x)=2x$; б) $f(x)=1-\sin x$;
в) $f(x)=x^2$; г) $f(x)=\cos x+2$.

334. Среди трех данных функций укажите такую, что две другие являются соответственно производной и первообразной для нее:

а) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=-\frac{1}{x}$, $h(x)=-\frac{2}{x^3}$;

б) $f(x)=\frac{x^2}{2}-\cos x$, $g(x)=1+\cos x$, $h(x)=x+\sin x$;

в) $f(x)=1$, $g(x)=x+2$, $h(x)=\frac{x^2}{2}+2x$;

г) $f(x)=3-2\sin x$, $g(x)=3x+2\cos x$, $h(x)=-2\cos x$.

27. Основное свойство первообразной

1. Общий вид первообразных. Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные. При решении этой задачи важную роль играет следующее утверждение:

Признак постоянства функции. *Если $F'(x)=0$ на некотором промежутке I, то функция F — постоянная на этом промежутке.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое x_0 из промежутка I. Тогда для любого числа x из такого промежутка в силу формулы Лагранжа можно указать такое число c, заключенное между x и x_0, что

$$F(x)-F(x_0)=F'(c)(x-x_0).$$

По условию $F'(c)=0$, так как $c\in I$, следовательно,

$$F(x)-F(x_0)=0.$$

Итак, для всех x из промежутка I

$$F(x)=F(x_0),$$

т е. функция F сохраняет постоянное значение.

Все первообразные функции f можно записать с помощью одной формулы, которую называют *общим видом первообразных для функции* f. Справедлива следующая теорема (*основное свойство первообразных*):

Теорема. ***Любая первообразная для функции f на промежутке I может быть записана в виде***

$$F(x)+C, \tag{1}$$

где F (x) — одна из первообразных для функции f (x) на промежутке I, а C — произвольная постоянная.

Поясним это утверждение, в котором кратко сформулированы два свойства первообразной:

1) какое бы число ни поставить в выражение (1) вместо C, получим первообразную для f на промежутке I;

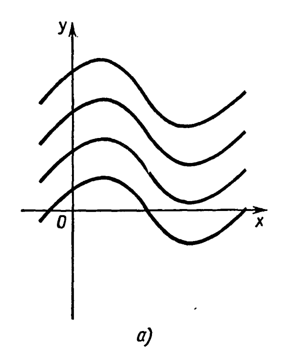
2) какую бы первообразную Φ для f на промежутке I ни взять, можно подобрать такое число C, что для всех x из промежутка I будет выполнено равенство

$$\Phi(x)=F(x)+C.$$

Доказательство. 1) По условию функция F — первообразная для f на промежутке I. Следовательно, $F'(x)=f(x)$ для любого $x\in I$, поэтому

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x),$$

т. е. $F(x)+C$ — первообразная для функции f.



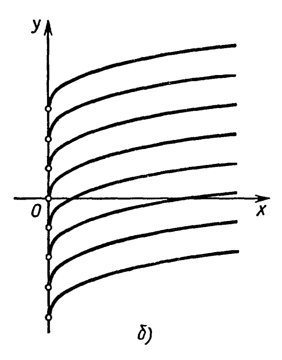


Рис. 118

2) Пусть $\Phi(x)$ — одна из первообразных для функции f на том же промежутке I, т. е. $\Phi'(x)=f(x)$ для всех $x \in I$. Тогда

$$(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Отсюда следует в силу признака постоянства функции, что разность $\Phi(x)-F(x)$ есть функция, принимающая некоторое постоянное значение C на промежутке I.

Таким образом, для всех x из промежутка I справедливо равенство $\Phi(x)-F(x)=C$, что и требовалось доказать.

Основному свойству первообразной можно придать геометрический смысл: *графики любых двух первообразных для функции f получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy* (рис. 118, *а*).

2. Примеры нахождения первообразных.

○ Пример 1. Найдем общий вид первообразных для функции $f(x)=-x^3$ на R.

Заметим, что одной из первообразных функции f является функция $-\frac{x^4}{4}$, так как $\left(-\frac{x^4}{4}\right)'=-x^3$. В силу доказанной теоремы общий вид первообразных для функции f таков:

$$F(x)=-\frac{x^4}{4}+C.$$

Пример 2. Найдем первообразную $F_0(x)$ для функции $f(x)=\frac{1}{x^2}$ на промежутке $(0; \infty)$, принимающую при $x=1$ значение 1

Легко проверить, что любая первообразная функции f имеет вид $F(x)=-\frac{1}{x}+C$. Так как по условию $F(1)=1$, приходим к

уравнению (относительно C) вида $-1+C=1$, откуда $C=2$, и, следовательно, $F_0(x)=-\frac{1}{x}+2$.

Пример 3. Точка движется по прямой с постоянным ускорением a. В начальный момент $t_0=0$ точка имеет начальную координату x_0 и начальную скорость v_0. Найдем координату $x(t)$ точки как функцию от времени.

Так как $x'(t)=v(t)$ и $v'(t)=a(t)$, из условия $a(t)=a$ получаем $v'(t)=a$. Отсюда следует, что

$$v(t)=at+C_1. \qquad (2)$$

Подставляя $t_0=0$ в формулу (2), находим $C_1=v_0$ и

$$x'(t)=v(t)=at+v_0.$$

Следовательно,

$$x(t)=\frac{at^2}{2}+v_0t+C_2. \qquad (3)$$

Чтобы найти C_2, подставим в (3) значение $t_0=0$, откуда $C_2=x_0$. Итак,

$$x(t)=\frac{at^2}{2}+v_0t+x_0. \ \bullet$$

Замечание. Для краткости при нахождении первообразной функции f промежуток, на котором задана f, обычно не указывают. Имеются в виду промежутки возможно большей длины. Так, в следующем примере естественно считать, что функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ задана на интервале $(0; \infty)$.

○ Пример 4. Найдем для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ первообразную, график которой проходит через точку $M(9; -2)$.

Любая первообразная функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ записывается в виде $2\sqrt{x}+C$. Графики этих первообразных изображены на рисунке 118, *б*. Координаты точки $M(9; -2)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению $2\sqrt{9}+C=-2$. Отсюда находим, что $C=-8$. Следовательно, $F(x)=2\sqrt{x}-8$. ●

Ниже приводится таблица первообразных для некоторых функций:

Функция f	k (постоянная)	x^n ($n\in Z$, $n\neq-1$)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Общий вид первообразных для f	$kx+C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$2\sqrt{x}+C$	$-\cos x+$ $+C$	$\sin x+C$	$\operatorname{tg} x+C$	$-\operatorname{ctg} x+$ $+C$

Проверьте правильность заполнения этой таблицы самостоятельно.

Упражнения

Найдите общий вид первообразных для функции f (335—336).

335. а) $f(x)=2-x^4$; б) $f(x)=x+\cos x$;
в) $f(x)=4x$; г) $f(x)=-3$.

336. а) $f(x)=x^6$; б) $f(x)=\frac{1}{x^3}-2$;
в) $f(x)=1-\frac{1}{x^4}$; г) $f(x)=x^5$.

337. Для функции f найдите первообразную F, принимающую заданное значение в указанной точке:

а) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $F\left(\frac{1}{2}\right)=-12$; б) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$;
в) $f(x)=x^3$, $F(-1)=2$; г) $f(x)=\sin x$, $F(-\pi)=-1$.

---

338. Проверьте, что функция F является первообразной для функции f. Найдите общий вид первообразных для f, если:

а) $F(x)=\sin x-x\cos x$, $f(x)=x\sin x$;

б) $F(x)=\sqrt{x^2+1}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

в) $F(x)=\cos x+x\sin x$, $f(x)=x\cos x$;

г) $F(x)=x-\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{1+x^2}{x^2}$.

339. Для функции f найдите первообразную, график которой проходит через данную точку M:

а) $f(x)=2\cos x$, $M\left(-\frac{\pi}{2};\ 1\right)$;

б) $f(x)=1-x^2$, $M(-3;\ 9)$;

в) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3};\ -1\right)$;

г) $f(x)=\frac{1}{x^4}$, $M\left(\frac{1}{2};\ 3\right)$.

340. Для функции f найдите две первообразные, расстояние между соответствующими точками графиков которых (т. е. точками с равными абсциссами) равно a:

а) $f(x)=2-\sin x$, $a=4$; б) $f(x)=1+\operatorname{tg}^2 x$, $a=1$;
в) $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}$, $a=0{,}5$; г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $a=2$.

341. Точка движется по прямой с ускорением $a(t)$. В начальный момент t_0 ее координата равна x_0, а скорость v_0. Найдите координату $x(t)$ точки как функцию от времени:

а) $a(t) = -2t$, $t_0 = 1$, $x_0 = 4$, $v_0 = 2$;

б) $a(t) = \sin t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_0 = 2$, $v_0 = 1$;

в) $a(t) = 6t$, $t_0 = 0$, $x_0 = 3$, $v_0 = 1$;

г) $a(t) = \cos t$, $t_0 = \pi$, $x_0 = 1$, $v_0 = 0$.

28. Три правила нахождения первообразных

Эти правила похожи на соответствующие правила дифференцирования.

П р а в и л о 1. *Если F есть первообразная для f, а G — первообразная для g, то $F + G$ есть первообразная для $f + g$.*

Действительно, так как $F' = f$ и $G' = g$, по правилу вычисления производной суммы имеем:

$$(F + G)' = F' + G' = f + g.$$

П р а в и л о 2. *Если F есть первообразная для f, а k — постоянная, то функция kF — первообразная для kf.*

Действительно, постоянный множитель можно выносить за знак производной, поэтому

$$(kF)' = kF' = kf.$$

П р а в и л о 3. *Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b — постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k} F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.*

Действительно, по правилу вычисления производной сложной функции имеем:

$$\left(\frac{1}{k} F(kx + b)\right)' = \frac{1}{k} F'(kx + b) \cdot k = f(kx + b).$$

Приведем примеры применения этих правил.

○ П р и м е р 1. Найдем общий вид первообразных для функции

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}.$$

Так как для x^3 одна из первообразных есть $\frac{x^4}{4}$, а для $\frac{1}{x^2}$ одной из первообразных является $-\frac{1}{x}$, по правилу 1 находим: одной из первообразных для функции $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2}$ будет $\frac{x^4}{4} - \frac{1}{x}$.

О т в е т. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C$.

Пример 2. Найдем одну из первообразных для функции $f(x)=5\cos x$.

Так как для $\cos x$ одна из первообразных есть $\sin x$, применяя правило 2, получаем ответ: $F(x)=5\sin x$.

Пример 3. Найдем одну из первообразных для функции $y=\sin(3x-2)$.

Для $\sin x$ одной из первообразных является $-\cos x$, поэтому по правилу 3 искомая первообразная равна $F(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x-2)$.

Пример 4. Найдем одну из первообразных для функции

$$f(x)=\frac{1}{(7-3x)^5}.$$

Так как для $\frac{1}{x^5}$ первообразной является $-\frac{1}{4x^4}$, по правилу 3 искомая первообразная равна $F(x)=\frac{1}{-3}\cdot\frac{-1}{4(7-3x)^4}=\frac{1}{12(7-3x)^4}$.

Пример 5. Материальная точка массой 2 кг движется по оси Ox под действием силы, направленной вдоль этой оси. В момент времени t эта сила равна $F(t)=3t-2$. Найдите закон $x(t)$ движения точки, если известно, что при $t=2$с скорость точки равна 3 м/с, а координата равна 1 (F — сила в ньютонах, t — время в секундах, x — путь в метрах).

Согласно второму закону Ньютона $F=ma$, где a — ускорение. Имеем

$$a(t)=\frac{F}{m}=\frac{3}{2}t-1.$$

Скорость $v(t)$ точки есть первообразная для ее ускорения $a(t)$, поэтому

$$v(t)=\frac{3}{4}t^2-t+C_1.$$

Постоянную C_1 находим из условия $v(2)=3$:

$$\frac{3}{4}\cdot 4-2+C_1=3, \text{ т. е. } C_1=2 \text{ и } v(t)=\frac{3}{4}t^2-t+2.$$

Координата $x(t)$ есть первообразная для скорости $v(t)$, поэтому

$$x(t)=\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t+C_2.$$

Постоянную C_2 находим из условия $x(2)=1$:

$$\frac{1}{4}\cdot 8-\frac{1}{2}\cdot 4+4+C_2=1,\quad C_2=-3.$$

Итак, закон движения точки:

$$x(t)=\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t-3. \ \bullet$$

Упражнения

Найдите общий вид первообразных для функции f (342—344).

342. а) $f(x)=2-x^3+\frac{1}{x^3}$; б) $f(x)=x-\frac{2}{x^5}+\cos x$;

в) $f(x)=\frac{1}{x^2}-\sin x$; г) $f(x)=5x^2-1$.

343. а) $f(x)=(2x-3)^5$; б) $f(x)=3\sin 2x$;

в) $f(x)=(4-5x)^7$; г) $f(x)=-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$.

344. а) $f(x)=\frac{3}{(4-15x)^4}$; б) $f(x)=\frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$;

в) $f(x)=\frac{4}{(3x-1)^2}$; г) $f(x)=-\frac{2}{x^5}+\frac{1}{\cos^2(3x-1)}$.

345. Найдите для функции f первообразную, график которой проходит через точку M:

а) $f(x)=4x+\frac{1}{x^2}$, $M(-1;\ 4)$; б) $f(x)=x^3+2$, $M(2;\ 15)$;

в) $f(x)=1-2x$, $M(3;\ 2)$; г) $f(x)=\frac{1}{x^3}-10x^4+3$, $M(1;\ 5)$.

---

346. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=1-\cos 3x+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

б) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 4x}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}-3x^2$;

в) $f(x)=\frac{2}{\cos^2(3x+1)}-3\sin(4-x)+2x$;

г) $f(x)=\frac{1}{(3-2x)^3}+\frac{3}{\sqrt{5x-2}}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

347. Задайте первообразную F для функции f формулой, если известны координаты точки M графика F:

а) $f(x)=2x+1$, $M(0;\ 0)$;
б) $f(x)=3x^2-2x$, $M(1;\ 4)$;
в) $f(x)=x+2$, $M(1;\ 3)$;
г) $f(x)=-x^2+3x$, $M(2;\ -1)$.

348. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой $v(t)=t^2+2t-1$. Запишите формулу зависимости ее координаты x от времени t, если известно, что в начальный момент времени ($t=0$) точка находилась в начале координат.

349. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой $v(t)=2\cos\frac{t}{2}$. Найдите формулу, выражающую зависимость координаты точки от времени, если известно, что в момент $t=\frac{\pi}{3}$ с точка находилась на расстоянии 4 м от начала координат.

350. Точка движется прямолинейно с ускорением $a(t)=12t^2+4$. Найдите закон движения точки, если в момент $t=1$ с ее скорость равна 10 м/с, а координата равна 12 (единица измерения a равна 1 м/с^2).

351. Материальная точка массой m движется по оси Ox под действием силы, направленной вдоль этой оси. В момент времени t сила равна $F(t)$. Найдите формулу зависимости $x(t)$ от времени t, если известно, что при $t=t_0$ скорость точки равна v_0, а координата равна x_0 ($F(t)$ измеряется в ньютонах, t — в секундах, v — в метрах в секунду, m — в килограммах):

а) $F(t)=6-9t$, $t_0=1$, $v_0=4$, $x_0=-5$, $m=3$;

б) $F(t)=14\sin t$, $t_0=\pi$, $v_0=2$, $x_0=3$, $m=7$;

в) $F(t)=25\cos t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$, $v_0=2$, $x_0=4$, $m=5$;

г) $F(t)=8t+8$, $t_0=2$, $v_0=9$, $x_0=7$, $m=4$.

352. График первообразной F_1 для функции f проходит через точку M, а первообразной F_2 — через точку N. Какова разность этих первообразных? Какой из графиков F_1 и F_2 расположен выше, если:

а) $f(x)=3x^2-2x+4$, $M(-1;\ 1)$, $N(0;\ 3)$;

б) $f(x)=4x-6x^2+1$, $M(0;\ 2)$, $N(1;\ 3)$;

в) $f(x)=4x-x^3$, $M(2;\ 1)$, $N(-2;\ 3)$;

г) $f(x)=(2x+1)^2$, $M(-3;\ -1)$, $N\left(1;\ 6\frac{1}{3}\right)$?

§ 8. ИНТЕГРАЛ

29. Площадь криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a;\ b]$ оси Ox задана непрерывная функция f, не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a;\ b]$ и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 119), называют *криволинейной трапецией*. Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках 119, *а* — *д*.

Для вычисления площадей криволинейных трапеций применяется следующая теорема:



Рис. 119

Теорема. ***Если f — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a;\ b]$ функция, а F — ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции*** (рис. 120) ***равна приращению первообразной на отрезке $[a;\ b]$, т. е.***

$$S=F(b)-F(a). \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $S(x)$, определенную на отрезке $[a;\ b]$. Если $a<x\leqslant b$, то $S(x)$ — площадь

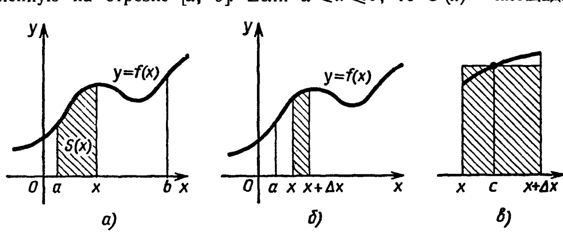


Рис. 120

той части криволинейной трапеции, которая расположена левее вертикальной прямой, проходящей через точку $M(x;\ 0)$ (рис. 120, *а*). Если $x=a$, то $S(a)=0$. Отметим, что $S(b)=S$ (S — площадь криволинейной трапеции).

Докажем, что

$$S'(x)=f(x). \quad (2)$$

По определению производной надо доказать, что

$$\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}\to f(x) \text{ при } \Delta x\to 0. \quad (3)$$

Выясним геометрический смысл числителя $\Delta S(x)$. Для простоты рассмотрим случай $\Delta x>0$. Поскольку $\Delta S(x)=S(x+\Delta x)-$ $-S(x)$, то $\Delta S(x)$ — площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 120, *б*. Возьмем теперь прямоугольник той же площади $\Delta S(x)$, опирающийся на отрезок $[x;\ x+\Delta x]$ (рис. 120, *в*). В силу непрерывности функции f верхняя сторона прямоугольника пересекает график функции в некоторой точке с абсциссой $c\in[x;\ x+\Delta x]$ (в противном случае этот прямоугольник либо содержится в части криволинейной трапеции над отрезком $[x;\ x+\Delta x]$, либо содержит ее; соответственно его площадь будет меньше или больше площади $\Delta S(x)$). Высота прямоугольника равна $f(c)$. По формуле площади прямоугольника имеем $\Delta S(x)=f(c)\Delta x$, откуда $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}=f(c)$. (Эта формула верна и при $\Delta x<0$.) Поскольку точка c лежит между x и $x+\Delta x$, то c стремится к x при $\Delta x\to 0$. Так как функция f непрерывна, $f(c)\to f(x)$ при $\Delta x\to 0$. Итак, $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}\to f(x)$ при $\Delta x\to 0$.

Формула (2) доказана.

Мы получили, что S есть первообразная для f. Поэтому в силу основного свойства первообразных для всех $x\in[a;\ b]$ имеем:

$$S(x)=F(x)+C,$$

где C — некоторая постоянная, а F — одна из первообразных для функции f. Для нахождения C подставим $x=a$:

$$F(a)+C=S(a)=0,$$

откуда $C=-F(a)$. Следовательно,

$$S(x)=F(x)-F(a). \quad (4)$$

Поскольку площадь криволинейной трапеции равна $S(b)$, подставляя $x=b$ в формулу (4), получим:

$$S=S(b)=F(b)-F(a).$$

○ Пример. Вычислим площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)=x^2$, прямыми $y=0$, $x=1$ и $x=2$ (рис. 121).

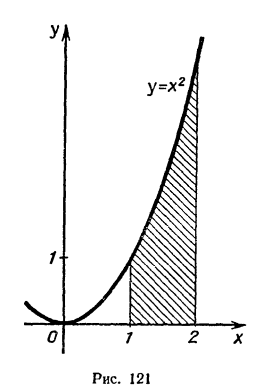


Рис. 121

Для функции $f(x)=x^2$ одной из первообразных является функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$. Следовательно,

$$S=F(2)-F(1)=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{7}{3}.$$ ●

△ Вы видели, что вычисление производной функции в большинстве случаев связано лишь с трудностями вычислительного характера. Сложнее обстоит дело с нахождением первообразных. Так, не сразу ясно, имеет данная функция первообразную или не имеет. В связи с этим отметим, что любая непрерывная на промежутке функция имеет на этом промежутке первообразную. Разъяснение этого факта дает доказательство формулы (2), приведенное выше. Однако первообразные некоторых из известных вам функций нельзя записать с помощью функций, изучаемых в школе. Так обстоит дело, например, с функцией $y=\sqrt{x^3+1}$. ▲

Упражнения

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (353—354).

353. а) $y=x^2$, $y=0$, $x=3$; б) $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$;

в) $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$; г) $y=\frac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

354. а) $y=x^3+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;

б) $y=1+2\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$;

в) $y=4-x^2$, $y=0$;

г) $y=1+\frac{1}{2}\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (355—356).

355. а) $y=(x+2)^2$, $y=0$, $x=0$;

б) $y=\frac{1}{(x+1)^2}+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;

в) $y=2x-x^2$, $y=0$; г) $y=-(x-1)^3$, $y=0$, $x=0$.

356. а) $y=3\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$, $y=0$, $x=-\frac{3\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}$;

б) $y=2\cos 2x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$;

в) $y=\sin x-\frac{1}{2}$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5\pi}{6}$;

г) $y=1-\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

30. Интеграл. Формула Ньютона—Лейбница

1. Понятие об интеграле. Рассмотрим другой подход к задаче вычисления площади криволинейной трапеции. Для простоты будем считать функцию f неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a; b]$, тогда площадь S соответствующей криволинейной трапеции можно приближенно подсчитать следующим образом.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков одинаковой длины точками $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, и пусть $\Delta x=\frac{b-a}{n}=x_k-x_{k-1}$, где $k=1, 2, \ldots, n-1, n$. На каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ как на основании построим прямоугольник высотой $f(x_{k-1})$. Площадь этого прямоугольника равна:

$$f(x_{k-1})\,\Delta x=\frac{b-a}{n}f(x_{k-1}),$$

а сумма площадей всех таких прямоугольников (рис. 122) равна:

$$S_n=\frac{b-a}{n}(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})).$$

В силу непрерывности функции f объединение построенных прямоугольников при большом n, т. е. при малом Δx, «почти совпадает» с интересующей нас криволинейной трапецией. Поэтому возникает предположение, что $S_n\approx S$ при больших n. (Коротко говорят: «S_n стремится к S при n, стремящемся к бесконечности» — и пишут: $S_n\to S$ при $n\to\infty$.)

Предположение это правильно. Более того, для любой непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции f (не обязательно неотрицательной) S_n при $n\to\infty$ стремится к некоторому числу. Это число называют (по определению) *интегралом функции f от a до b* и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$, т. е.

$$S_n\to\int_a^b f(x)\,dx \text{ при } n\to\infty \qquad (1)$$

(читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»). Числа a и b

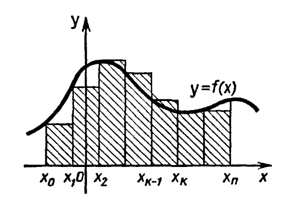



Рис. 122

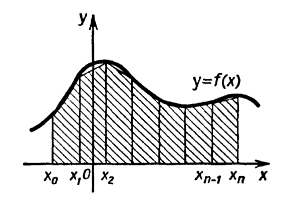


Рис. 123

называются *пределами интегрирования:* a — нижним пределом, b — верхним. Знак $\int$ называют *знаком интеграла.* Функция f называется *подынтегральной функцией,* а переменная x — *переменной интегрирования.*

Итак, если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a; b]$, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции выражается формулой

$$S = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (2)$$

▽ Для приближенного вычисления интеграла можно рассматривать суммы S_n. Лучше, однако, воспользоваться суммами

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)\right),$$

слагаемые которых (в случае положительной функции f) равны площадям трапеций, «вписанных» в криволинейную трапецию и ограниченных ломаными, как это изображено на рисунке 123.

Действительно, применяя формулу площади трапеции, получаем:

$$S_n = \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \ldots =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)\right). \ ▲$$

2. Формула Ньютона — Лейбница. Сравнивая формулы площади криволинейной трапеции

$$S = F(b) - F(a) \text{ и } S = \int_a^b f(x)\, dx,$$

делаем вывод: *если F — первообразная для f на $[a; b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Формула (3) называется *формулой Ньютона — Лейбница.* Она верна для любой функции f, непрерывной на отрезке $[a;\ b]$.

Рассмотрим примеры применения формулы Ньютона — Лейбница.

○ Пример 1. Вычислим $\int_{-1}^{2} x^2dx$.

Поскольку для x^2 одной из первообразных является $\frac{x^3}{3}$,

$$\int_{-1}^{2} x^2dx=\frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}=3.$$

Для удобства записи разность $F(b)-F(a)$ (приращение функции F на отрезке $[a;\ b]$) принято сокращенно обозначать $F(x)\Big|_a^b$, т. е.

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

Пользуясь этим обозначением, формулу Ньютона — Лейбница обычно записывают в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b. \qquad (4)$$

Пример 2. Вычислим $\int_0^{\pi} \sin xdx$.

Пользуясь введенными обозначениями, получим:

$$\int_0^{\pi} \sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=2.$$ ●

Замечание 1. Данное нами определение интеграла не позволяет говорить, например, об интеграле от -1 до 2 функции $\frac{1}{x^2}$, так как эта функция не является непрерывной на отрезке $[-1;\ 2]$. Заметим также, что функция $-\frac{1}{x}$ не является первообразной для функции $\frac{1}{x^2}$ на этом отрезке, поскольку точка 0, принадлежащая отрезку, не входит в область определения функции.

○ Пример 3. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y=1-x$ и $y=3-2x-x^2$.

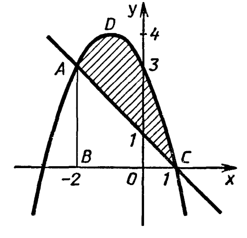


Рис. 124

Нарисуем эти линии (рис. 124) и найдем абсциссы точек их пересечения из уравнения $1-x=$ $=3-2x-x^2$. Решая это уравнение, находим $x=1$ и $x=-2$. Искомая площадь может быть получена как

разность площадей криволинейной трапеции $BADC$ и треугольника BAC. По формуле (2) имеем:

$$S_{BADC}=\int_{-2}^{1}(3-2x-x^2)\,dx=\left(3x-x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}=$$
$$=\left(3-1-\frac{1}{3}\right)-\left(3\cdot(-2)-(-2)^2-\frac{(-2)^3}{3}\right)=9.$$
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=\frac{9}{2}.$$

Следовательно, площадь заштрихованной фигуры равна:

$$S=S_{BADC}-S_{\triangle BAC}=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5. \quad ●$$

Замечание 2. Удобно расширить понятие интеграла, полагая по определению при $a\geqslant b$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

При таком соглашении формула Ньютона — Лейбница оказывается верной при произвольных a и b (в частности, $\int_a^a f(x)\,dx=0$).

Упражнения

Вычислите интегралы (357—358).

357. а) $\int_{-1}^{2} x^4dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; в) $\int_1^3 x^3dx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

358. а) $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$; б) $\int_0^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}dx$; в) $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$; г) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$.

359. Докажите справедливость равенства:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}=\int_0^1 dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx=\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx=\int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2dx$; г) $\int_0^1 (2x+1)\,dx=\int_0^2 (x^3-1)\,dx$.

Вычислите (предварительно сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями (360—361).

360. а) $y=x^4$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$; б) $y=x^4$, $y=1$;
в) $y=x^2-4x+5$, $y=0$, $x=0$, $x=4$; г) $y=x^2-4x+5$, $y=5$.

361. а) $y=1-x^3$, $y=0$, $x=0$;
б) $y=2-x^3$, $y=1$, $x=-1$, $x=1$;
в) $y=-x^2-4x$, $y=0$, $x=-3$, $x=-1$;
г) $y=-x^2-4x$, $y=1$, $x=-3$, $x=-1$.

Вычислите интегралы (362—363).

362. $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$; в) $\int\limits_{0}^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}}$; г) $\int\limits_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.

363. а) $\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)^2 dx$; б) $\int\limits_{0}^{2} (1+2x)^3\,dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x)\,dx$; г) $\int\limits_{1}^{4} \left(x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx$.

Вычислите (предварительно сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями (364—366).

364. а) $y=x^3$, $y=8$, $x=1$;
б) $y=2\cos x$, $y=1$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$;
в) $y=x^2-2x+4$, $y=3$, $x=-1$;
г) $y=\sin x$, $y=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5\pi}{6}$.

365. а) $y=4x-x^2$, $y=4-x$;
б) $y=\frac{16}{x^2}$, $y=2x$, $x=4$;
в) $y=x^2$, $y=2x$;
г) $y=6-2x$, $y=6+x-x^2$.

366. а) $y=x^2-4x+4$, $y=4-x^2$;
б) $y=x^2-2x+2$, $y=2+6x-x^2$;
в) $y=x^2$, $y=2x-x^2$;
г) $y=x^2$, $y=x^3$.

367. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=8x-2x^2$, касательной к этой параболе в ее вершине и прямой $x=0$.

368. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)=8-0{,}5x^2$, касательной к нему в точке с абсциссой $x=-2$ и прямой $x=1$.

369. Докажите равенство:

а) $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx+\int\limits_a^b g(x)\,dx$;

б) $\int\limits_a^b kf(x)\,dx=k\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (где k — постоянная).

31. Применения интеграла

1. Вычисление объемов тел. Пусть задано тело объемом V, причем имеется такая прямая (рис. 125), что, какую бы плоскость, перпендикулярную этой прямой, мы ни взяли, нам известна площадь S сечения тела этой плоскостью. Но плоскость, перпендикулярная оси Ox, пересекает ее в некоторой точке x. Следовательно, каждому числу x (из отрезка $[a;\ b]$, см. рис. 125) поставлено в соответствие единственное число $S(x)$ — площадь сечения тела этой плоскостью. Тем самым на отрезке $[a;\ b]$ задана функция $S(x)$. Если функция S непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то справедлива формула

$$V=\int\limits_a^b S(x)\,dx. \tag{1}$$

Полное доказательство этой формулы дается в курсах математического анализа, а здесь остановимся на наглядных соображениях, приводящих к ней.

Разобьем отрезок $[a;\ b]$ на n отрезков равной длины точками $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<b=x_n$, и пусть

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=x_k-x_{k-1},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

(см. п. 30). Через каждую точку x_k проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox. Эти плоскости разрезают заданное тело на слои (рис. 126, *а, б*). Объем слоя, заключенного между плоскостями α_{k-1} и α_k, при достаточно больших n приближенно равен площади $S(x_{k-1})$ сечения, умноженной на «толщину слоя» Δx, и поэтому

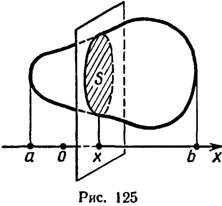
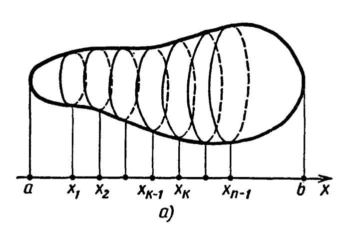


Рис. 125

$$V\approx S(x_0)\,\Delta x+S(x_1)\,\Delta x+\ldots+S(x_{n-1})\,\Delta x=V_n.$$

Точность этого приближенного равенства тем выше, чем тоньше слои, на которые разрезано тело, т. е. чем больше n. Поэтому $V_n\to V$ при $n\to\infty$. По определению интеграла



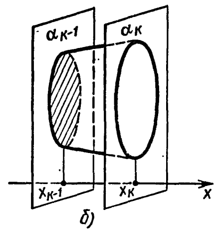


Рис. 126

$$V_n \to \int_a^b S(x)\,dx \text{ при } n \to \infty.$$

○ Пример 1. Докажем, что объем усеченной пирамиды высотой H с площадями оснований S и s равен $\frac{1}{3}H(S+s+\sqrt{Ss})$.

Пусть точка O — вершина «полной» пирамиды (рис. 127). Проведем через точку O ось Ox перпендикулярно основанию пирамиды. Основания усеченной пирамиды пересекают ось Ox в точках a и b. Каждая плоскость, перпендикулярная оси Ox и пересекающая отрезок $[a; b]$ этой оси в точке x, дает в сечении многоугольник, подобный многоугольнику — основанию пирамиды. Поэтому площадь сечения $S(x)$ равна kx^2, и, в частности,

$$s = S(a) = ka^2 \text{ и } S = S(b) = kb^2.$$

Объем усеченной пирамиды вычисляем по формуле (1):

$$V = \int_a^b kx^2 dx = \frac{kx^3}{3}\Big|_a^b = \frac{k}{3}(b^3 - a^3) = \frac{b-a}{3}(kb^2 + kab + ka^2) =$$
$$= \frac{H}{3}(S + \sqrt{Ss} + s).$$

Пример 2. Пусть криволинейная трапеция опирается на отрезок $[a; b]$ оси Ox и ограничена сверху графиком функции f, неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a; b]$. При вращении этой криволинейной трапеции вокруг оси Ox получаем тело (рис. 128, а), объем которого находится по формуле

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx. \qquad (2)$$

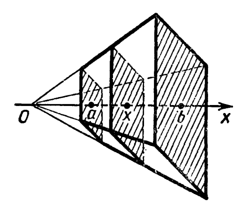
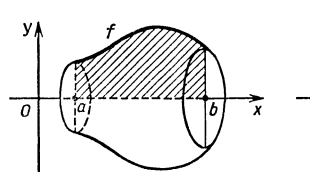


Рис. 127



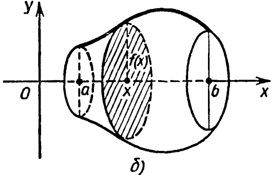


Рис. 128

Действительно, каждая плоскость, перпендикулярная оси Ox и пересекающая отрезок $[a;\ b]$ этой оси в точке x, дает в сечении с телом круг радиуса $f(x)$ и площади $S(x)=\pi f^2(x)$ (рис. 128, *б*). Отсюда по формуле (1) получается формула (2). ●

2. Работа переменной силы. Рассмотрим материальную точку, движущуюся под действием силы P по прямой. Если действующая сила постоянна и направлена вдоль прямой, а перемещение равно s, то, как известно из физики, работа A этой силы равна произведению Ps. Теперь выведем формулу для подсчета работы, совершаемой переменной силой.

Пусть точка движется по оси Ox под действием силы, проекция которой на ось Ox есть функция f от x. При этом мы будем предполагать, что f есть непрерывная функция. Под действием этой силы материальная точка переместилась из точки $M(a)$ в точку $M(b)$ (рис. 129, *а*). Покажем, что в этом случае работа A подсчитывается по формуле

$$A=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Разобьем отрезок $[a;\ b]$ на n отрезков одинаковой длины $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. Это отрезки $[a;\ x_1]$, $[x_1;\ x_2]$, ..., $[x_{n-1};\ b]$ (рис. 129, *б*). Работа силы на всем отрезке $[a;\ b]$ равна сумме работ этой силы на полученных отрезках. Так как f есть непрерывная функция от x, при достаточно малом отрезке $[a;\ x_1]$ работа силы на этом отрезке приблизительно равна $f(a)(x_1-a)$ (мы пренебрегаем тем, что f на отрезке меняется). Аналогично работа силы на втором отрезке $[x_1;\ x_2]$ приближенно равна $f(x_1)(x_2-x_1)$ и т. д.; работа силы на n-м отрезке приближенно равна $f(x_{n-1})(b-x_{n-1})$. Следо-

M(a) M(b)
0 a b x
а)

M(a) M(b)
0 $a=x_0$ x_1 x_2 ... x_{n-1} $x_n=b$ x
б)

Рис. 129

вательно, работа силы на всем отрезке $[a;\ b]$ приближенно равна:

$$A \approx A_n = f(a)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\,\Delta x =$$
$$= \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right),$$

и точность приближенного равенства тем выше, чем короче отрезки, на которые разбит отрезок $[a;\ b]$. Естественно, что это приближенное равенство переходит в точное, если считать, что $n \to \infty$:

$$A_n = \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right) \to A.$$

Поскольку A_n при $n \to \infty$ стремится к интегралу рассматриваемой функции от a до b (см. п. 30), формула (3) выведена.

○ Пример 3. Сила упругости пружины, растянутой на 5 см, равна 3 Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 5 см?

По закону Гука сила F, растягивающая пружину на величину x, вычисляется по формуле $F = kx$, где k — постоянный коэффициент пропорциональности (рис. 130), точка O соответствует свободному положению пружины. Из условий задачи следует, что $3 = k \cdot 0{,}05$. Следовательно, $k = 60$ и сила $F = 60x$, а по формуле (3)

$$A = \int_0^{0,05} 60x\,dx = 30x^2 \Big|_0^{0,05}; \quad A = 0{,}075 \text{ Дж. } ●$$

▽ **3. Центр масс.** При нахождении центра масс пользуются следующими правилами:

1) Координата x' центра масс системы материальных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, расположенных на прямой в точках с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, находится по формуле

$$x' = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \qquad (4)$$

2) При вычислении координаты центра масс можно любую часть фигуры заменить на материальную точку поместив ее в центр масс этой части, и приписать ей массу, равную массе рассматриваемой части фигуры.

○ Пример 4. Пусть вдоль стержня — отрезка $[a;\ b]$ оси Ox — распределена масса плотностью $\rho(x)$, где $\rho(x)$ — непрерывная функция. Покажем, что:

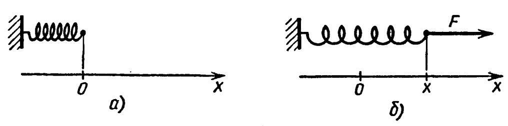


Рис. 130

а) суммарная масса M стержня равна $\int_a^b \rho(x)\,dx$;

б) координата центра масс x' равна $\frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)\,dx$.

Разобьем отрезок $[a;\ b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ (рис. 129, *б*). На каждом из n этих отрезков плотность можно считать при больших n постоянной и примерно равной $\rho(x_{k-1})$ на k-м отрезке (в силу непрерывности $\rho(x)$). Тогда масса k-го отрезка примерно равна $m_k = \frac{b-a}{n}\rho(x_{k-1})$, а масса всего стержня равна $\frac{b-a}{n}(\rho(x_0)+\rho(x_1)+\ldots+\rho(x_{n+1}))$. Считая каждый из n маленьких отрезков материальной точкой массы m_k, помещенной в точке x_{k-1}, получим по формуле (4), что координата центра масс приближенно находится так:

$$x'_n = \frac{\frac{b-a}{n}(x_0\rho(x_0)+x_1\rho(x_1)+\ldots+x_{n-1}\rho(x_{n-1}))}{\frac{b-a}{n}(\rho(x_0)+\rho(x_1)+\ldots+\rho(x_{n-1}))}.$$

Теперь осталось заметить, что при $n \to \infty$ числитель стремится к интегралу $\int_a^b x\rho(x)\,dx$, а знаменатель (выражающий массу всего стержня) — к интегралу $\int_a^b \rho(x)\,dx$.

Для нахождения координат центра масс системы материальных точек на плоскости или в пространстве также пользуются формулой (4). ●▲

Упражнения

370. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

а) $y = x^2+1$, $x=0$, $x=1$, $y=0$;
б) $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$;
в) $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $y=0$;
г) $y=1-x^2$, $y=0$.

371. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^2$, $y=x$; б) $y=2x$, $y=x+3$, $x=0$, $x=1$;
в) $y=x+2$, $y=1$, $x=0$, $x=2$; г) $y=\sqrt{x}$, $y=x$.

372. а) Выведите формулу объема шарового сегмента радиуса R и высоты H.

б) Выведите формулу объема усеченного конуса высотой H с радиусами оснований R и r.

373. Какую работу надо затратить на сжатие пружины на 4 см, если известно, что сила в 2 Н сжимает эту пружину на 1 см?

374. Сила в 4 Н растягивает пружину на 8 см. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 8 см?

---

375. Под действием электрического заряда величиной q электрон перемещается по прямой с расстояния a до расстояния b. Найдите работу силы взаимодействия зарядов. (Рассмотрите два случая: 1) $a<b$, $q<0$; 2) $b<a$, $q>0$. Коэффициент пропорциональности в формуле, выражающей закон Кулона, считайте равным γ.)

376. Канал имеет в разрезе форму равнобочной трапеции высотой h с основаниями a и b. Найдите силу, с которой вода, заполняющая канал, давит на плотину ($a>b$, a — верхнее основание трапеции).

377. Вода, подаваемая с плоскости основания в цилиндрический бак через отверстие в дне, заполняет весь бак. Определите затраченную при этом работу. Высота бака равна h, радиус основания равен r.

378. Найдите работу против силы выталкивания при погружении шара в воду.

379. Однородный стержень длиной $l=20$ см вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец. Угловая скорость вращения $\omega=10\pi$ $с^{-1}$. Площадь поперечного сечения стержня $S=4$ $см^2$, плотность материала, из которого изготовлен стержень, равна $\rho=7{,}8$ $г/см^3$. Найдите кинетическую энергию стержня.

380. Найдите центр масс однородного прямого кругового конуса.

Сведения из истории

1. О происхождении терминов и обозначений. История понятия интеграла тесно связана с задачами нахождения квадратур. *Задачами о квадратуре* той или иной плоской фигуры математики Древней Греции и Рима называли задачи, которые мы сейчас относим к *задачам на вычисление площадей.* Латинское слово quadratura переводится как «придание квадратной формы». Необходимость в специальном термине объясняется тем, что в античное время (и позднее, вплоть до XVIII столетия) еще не были достаточно развиты привычные для нас представления о действительных числах. Математики оперировали с их геометрическими аналогами или скалярными величинами, которые нельзя перемножать. Поэтому и задачи на нахождение площадей приходилось формулировать, например, так: «Построить квадрат, равновеликий данному кругу». (Эта классическая задача «о квадратуре

круга» не может, как известно, быть решена с помощью циркуля и линейки.)

Символ $\int$ введен Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова summa). Само слово *интеграл* придумал Я. Бернулли (1690 г.). Вероятно, оно происходит от латинского integro, которое переводится как *приводить в прежнее состояние, восстанавливать.* (Действительно, операция интегрирования «восстанавливает» функцию, дифференцированием которой получена подынтегральная функция.) Возможно, происхождение термина *интеграл* иное: слово integer означает *целый.*

В ходе переписки И. Бернулли и Г. Лейбниц согласились с предложением Я. Бернулли. Тогда же, в 1696 г., появилось и название новой ветви математики — *интегральное исчисление* (calculus integralis), которое ввел И. Бернулли.

Другие известные вам термины, относящиеся к интегральному исчислению, появились заметно позднее. Употребляющееся сейчас название *первообразная функция* заменило более раннее «примитивная функция», которое ввел Лагранж (1797 г.). Латинское слово primitivus переводится как «начальный»: $F(x)=$ $=\int f(x)\,dx$ — начальная (или первоначальная, или первообразная) для $f(x)$, которая получается из $F(x)$ дифференцированием.

В современной литературе множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется также *неопределенным интегралом.* Это понятие выделил Лейбниц, который заметил, что все первообразные функции отличаются на произвольную постоянную. А $\int_a^b f(x)\,dx$ называют *определенным интегралом* (обозначение ввел К. Фурье (1768—1830), но пределы интегрирования указывал уже Эйлер).

2. Из истории интегрального исчисления. Многие значительные достижения математиков Древней Греции в решении задач на нахождение *квадратур* (т. е. вычисление площадей) плоских фигур, а также *кубатур* (вычисление объемов) тел связаны с применением *метода исчерпывания,* предложенным Евдоксом Книдским (ок. 408 — ок. 355 до н. э.). С помощью этого метода Евдокс доказал, например, что площади двух кругов относятся как квадраты их диаметров, а объем конуса равен $\frac{1}{3}$ объема цилиндра, имеющего такие же основание и высоту.

Метод Евдокса был усовершенствован Архимедом. С этой модификацией вы знакомы: вывод формулы площади круга, предложенный в курсе геометрии, основан на идеях Архимеда. Напомним основные этапы, характеризующие метод Архимеда: 1) доказывается, что площадь круга меньше площади любого описанного около него правильного многоугольника, но больше площади любого вписанного; 2) доказывается, что при неограниченном удвоении числа сторон разность площадей этих много-

Архимед

(ок. 287—212 до н. э.) — великий ученый. Первооткрыватель многих фактов и методов математики и механики, блестящий инженер. Глубокие и остроумные идеи Архимеда, связанные с вычислением площадей и объемов, решением задач механики, по существу, предвосхищают открытие математического анализа, сделанное почти 2000 лет спустя.

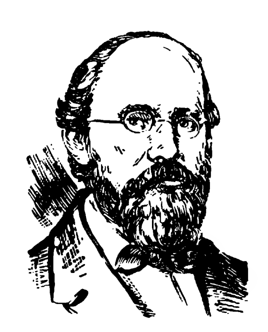


угольников стремится к нулю; 3) для вычисления площади круга остается найти значение, к которому стремится отношение площади правильного многоугольника при неограниченном удвоении числа его сторон.

С помощью метода исчерпывания, целого ряда других остроумных соображений (в том числе с привлечением моделей механики) Архимед решил многие задачи. Он дал оценку числа $\pi\left(3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}\right)$, нашел объемы шара и эллипсоида, площадь сегмента параболы и т. д. Сам Архимед высоко ценил эти результаты: согласно его желанию на могиле Архимеда высечен шар, вписанный в цилиндр (Архимед показал, что объем такого шара равен $\frac{2}{3}$ объема цилиндра).

Архимед предвосхитил многие идеи интегрального исчисления. (Добавим, что практически и первые теоремы о пределах были доказаны им.) Но потребовалось более полутора тысяч лет, прежде чем эти идеи нашли четкое выражение и были доведены до уровня исчисления.

Математики XVII столетия, получившие многие новые результаты, учились на трудах Архимеда. Активно применялся и другой метод — *метод неделимых*, который также зародился в Древней Греции (он связан в первую очередь с атомистическими воззрениями Демокрита). Например, криволинейную трапецию (рис. 131, *а*) они представляли себе составленной из вертикальных отрезков длиной $f(x)$, которым тем не менее приписывали площадь, равную *бесконечно малой величине* $f(x)\,dx$. В соответствии с таким пониманием искомая площадь считалась равной сумме



Риман Георг Фридрих Бернхард

(1826—1866) —
немецкий ученый, один из крупнейших математиков XIX столетия. Сделал замечательные открытия в теории чисел и теории функций комплексного переменного. Заложил основы новой неевклидовой геометрии, получившей название римановой. Создал теорию интеграла, обобщающую результаты Коши.

$$S = \sum_{a<x<b} f(x)\,dx$$

бесконечно большого числа бесконечно малых площадей. Иногда даже подчеркивалось, что отдельные слагаемые в этой сумме — нули, но нули особого рода, которые, сложенные в бесконечном числе, дают вполне определенную положительную сумму.

На такой кажущейся теперь по меньшей мере сомнительной основе И. Кеплер (1571—1630) в своих сочинениях «Новая ас-

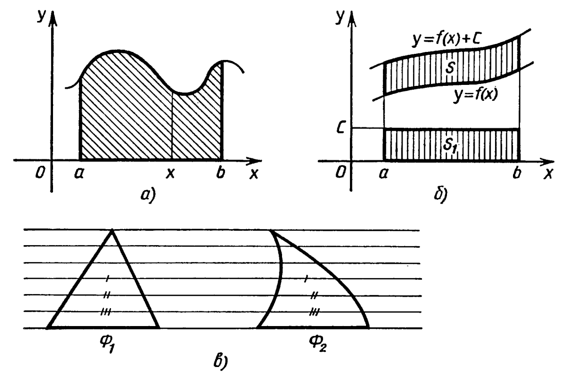


Рис. 131

Чебышев Пафнутий Львович

(1821—1894) —

русский математик и механик. Его исследования, получившие мировое признание, относятся к теории приближения функций многочленами («многочлены Чебышева» наилучшего приближения), интегральному исчислению, теории вероятностей, теории механизмов.



трономия» (1609 г.) и «Стереометрия винных бочек» (1615 г.) правильно вычислил ряд площадей (например, площадь фигуры, ограниченной эллипсом) и объемов (тело разрезалось на бесконечно тонкие пластинки). Эти исследования были продолжены итальянскими математиками Б. Кавальери (1598—1647) и Э. Торричелли (1608—1647). Сохраняет свое значение и в наше время сформулированный Б. Кавальери принцип, введенный им при некоторых дополнительных предположениях.

Пусть требуется найти площадь фигуры, изображенной на рисунке 131, *б*, где кривые, ограничивающие фигуру сверху и снизу, имеют уравнения $y=f(x)$ и $y=f(x)+c$.

Представляя нашу фигуру составленной из «неделимых», по терминологии Кавальери, бесконечно тонких столбиков, замечаем, что все они имеют общую длину c. Передвигая их в вертикальном направлении, мы можем составить из них прямоугольник с основанием $b-a$ и высотой c. Поэтому искомая площадь равна площади полученного прямоугольника, т. е.

$$S=S_1=c(b-a).$$

Общий принцип Кавальери для площадей плоских фигур формулируется так: *Пусть прямые некоторого пучка параллельных пересекают фигуры* Φ_1 *и* Φ_2 *по отрезкам равной длины* (рис. 131, *в*). *Тогда площади фигур* Φ_1 *и* Φ_2 *равны.* (В духе рассуждений математиков XVII столетия мы опускаем оговорки, без которых это утверждение не совсем верно.)

Аналогичный принцип действует в стереометрии и оказывается полезным при нахождении объемов. Простейшие следствия принципа Кавальери вы можете вывести сами. Докажите, например, что прямой и наклонный цилиндры с общим основанием и высотой имеют равные объемы.

В XVII в. были сделаны многие открытия, относящиеся к интегральному исчислению. Так, П. Ферма уже в 1629 г. решил задачу квадратуры любой кривой $y=x^n$, где n — целое (т. е. по существу вывел формулу $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$), и на этой основе решил ряд задач на нахождение центров тяжести. И. Кеплер при выводе своих знаменитых законов движения планет фактически опирался на идею приближенного интегрирования. И. Барроу (1630—1677), учитель Ньютона, близко подошел к пониманию связи интегрирования и дифференцирования. Большое значение имели работы по представлению функций в виде степенных рядов.

Однако при всей значимости результатов, полученных многими чрезвычайно изобретательными математиками XVII столетия, исчисления еще не было. Необходимо было выделить общие идеи, лежащие в основе решения многих частных задач, а также установить связь операций дифференцирования и интегрирования, дающую достаточно общий алгоритм. Это сделали Ньютон и Лейбниц, открывшие независимо друг от друга факт, известный вам под названием формулы Ньютона — Лейбница. Тем самым окончательно оформился общий метод. Предстояло еще научиться находить первообразные многих функций, дать логические основы нового исчисления и т. п. Но главное уже было сделано: дифференциальное и интегральное исчисление создано.

Методы математического анализа активно развивались в следующем столетии (в первую очередь следует назвать имена Л. Эйлера, завершившего систематическое исследование интегрирования элементарных функций, и И. Бернулли). В развитии интегрального исчисления приняли участие русские математики М. В. Остроградский (1801—1862), В. Я. Буняковский (1804—1889), П. Л. Чебышев (1821—1894). Принципиальное значение имели, в частности, результаты Чебышева, доказавшего, что существуют интегралы, не выразимые через элементарные функции.

Строгое изложение теории интеграла появилось только в прошлом веке. Решение этой задачи связано с именами О. Коши, одного из крупнейших математиков немецкого ученого Б. Римана (1826—1866), французского математика Г. Дарбу (1842—1917).

Ответы на многие вопросы, связанные с существованием площадей и объемов фигур, были получены с созданием К. Жорданом (1838—1922) теории меры.

Различные обобщения понятия интеграла уже в начале нашего столетия были предложены французскими математиками А. Лебегом (1875—1941) и А. Данжуа (1884—1974), советским математиком А. Я. Хинчиным (1894—1959).

Лебег Анри

(1875—1941) —

французский математик. Создатель теории меры (обобщение понятий площади и объема), на основе которой разработал новую теорию интеграла.



Вопросы и задачи на повторение

1. 1) Сформулируйте определение первообразной.

2) Докажите, что функция F является первообразной для функции f на $\boldsymbol{R}$:

а) $f(x)=2x+3,\ F(x)=x^2+3x+1$;

б) $f(x)=\sin 2x+3,\ F(x)=-\frac{\cos 2x}{2}+3x$;

в) $f(x)=-x^3+5,\ F(x)=-\frac{x^4}{4}+5x+2$;

г) $f(x)=-\cos\frac{x}{2}+1,\ F(x)=-2\sin\frac{x}{2}+x$.

3) Является ли функция F первообразной для функции f на заданном промежутке:

а) $F(x)=x^2-x,\ f(x)=2x-1$ на $\boldsymbol{R}$;

б) $F(x)=\frac{1}{x^2}-\sin x,\ f(x)=-\frac{1}{x^3}-\cos x$ на $\boldsymbol{R}$;

в) $F(x)=x^3+1,\ f(x)=\frac{x^4}{4}+x$ на $\boldsymbol{R}$;

г) $F(x)=x+\cos x,\ f(x)=1-\sin x$ на $\boldsymbol{R}$?

2. 1) Сформулируйте признак постоянства функции на заданном промежутке. Сформулируйте основное свойство первообразной.

2) Запишите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=kx+b$ (k и b — постоянные); б) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$;

в) $f(x)=x^n$ (n — целое число, $n\neq-1$); г) $f(x)=\cos x$.

3) Для функции f найдите первообразную F, принимающую заданное значение в данной точке:

а) $f(x)=\sin x-\cos x$, $F(\pi)=1$; б) $f(x)=\frac{x^2}{3}-\frac{3}{x^2}$, $F(3)=5$;

в) $f(x)=2x-5$, $F(1)=-2$; г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$, $F(6)=10$.

3. 1) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.

2) Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=\sin 3x-\frac{2}{\cos^2\frac{x}{2}}$; б) $f(x)=\frac{3}{x^4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $f(x)=(4-5x)^3-\frac{1}{(2x-1)^3}$; г) $f(x)=x-10\cos 2x$.

3) Для функции f найдите первообразную, график которой проходит через точку M:

а) $f(x)=(2-3x)^2$, $M(1;\ 2)$; б) $f(x)=\sin 2x$, $M\left(\frac{\pi}{4};\ -2\right)$;

в) $f(x)=\sqrt{2}\cos x$, $M\left(\frac{\pi}{4};\ 2\right)$; г) $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $M(0;\ 3)$.

4. 1) Какую фигуру называют криволинейной трапецией? Запишите формулу для вычисления площади криволинейной трапеции.

2) Приведите примеры криволинейных трапеций.

3) Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную данными линиями, и найдите ее площадь:

а) $y=\sin x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{3}$; б) $y=-x^3$, $y=0$, $x=-2$;

в) $y=(x-1)^2$, $y=0$, $x=3$;

г) $y=3-2x-x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=-2$.

5. 1) Объясните, что такое интеграл.

2) Запишите формулу Ньютона — Лейбница. Вычислите интеграл:

а) $\int_{-3}^{3}\frac{dx}{(x+10)^2}$; б) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; в) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin x\,dx$; г) $\int_{0}^{3}x^2dx$.

3) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^2$, $y=3x$; б) $y=x^2-4x+6$, $y=1$, $x=1$, $x=3$;

в) $y=4-x^2$, $y=3$; г) $y=\cos x$, $y=1$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

Глава IV

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 9. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ

32. Корень n-й степени и его свойства

1. Определение корня. С понятием квадратного корня из числа a вы уже знакомы: это такое число, квадрат которого равен a. Аналогично определяется корень n-й степени из числа a, где n — произвольное натуральное число.

Определение. ***Корнем n-й степени из числа a* называется такое число, *n*-я степень которого равна *a*.**

○ Пример 1. Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3=27$. Числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из числа 64, поскольку $2^6=64$ и $(-2)^6=64$. ●

Согласно данному определению корень n-й степени из числа a — это решение уравнения $x^n=a$. Число корней этого уравнения зависит от n и a. Рассмотрим функцию $f(x)=x^n$. Как известно, на промежутке $[0;\ \infty)$ эта функция при любом n возрастает и принимает все значения из промежутка $[0;\ \infty)$. По теореме о корне (п. 8) уравнение $x^n=a$ для любого $a\in[0;\ \infty)$ имеет неотрицательный корень и притом только один. Его называют *арифметическим корнем n-й степени из числа a* и обозначают $\sqrt[n]{a}$; число n называется *показателем корня*, а само число a — *подкоренным выражением*. Знак корня $\sqrt{\ }$ называют также *радикалом*.

Определение. ***Арифметическим корнем n-й степени из числа a* называют неотрицательное число, *n*-я степень которого равна *a*.**

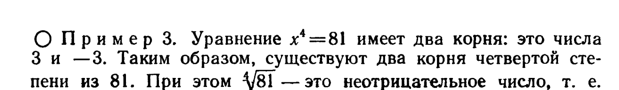
○ Пример 2. Найдем значение: а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$.

а) $\sqrt[3]{8}=2$, так как $2^3=8$ и $2>0$;

б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}$, так как $\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}$ и $\frac{3}{2}>0$. ●

При четных n функция $f(x)=x^n$ четна. Отсюда следует, что если $a>0$, то уравнение $x^n=a$, кроме корня $x_1=\sqrt[n]{a}$, имеет также корень $x_2=-\sqrt[n]{a}$. Если $a=0$, то корень один: $x=0$; если $a<0$, то это уравнение корней не имеет, поскольку четная степень любого числа неотрицательна.

Итак, при четном n существуют два корня n-й степени из любого положительного числа a; корень n-й степени из числа 0 равен нулю; корней четной степени из отрицательных чисел не существует.



○ **Пример 3.** Уравнение $x^4=81$ имеет два корня: это числа 3 и -3. Таким образом, существуют два корня четвертой степени из 81. При этом $\sqrt[4]{81}$ — это неотрицательное число, т. е. $\sqrt[4]{81}=3$, а $-3=-\sqrt[4]{81}$.

Пример 4. Положительным корнем уравнения $x^4=3$ является число $\sqrt[4]{3}$. Это число (так же, впрочем, как и число $-\sqrt[4]{3}$) иррационально. Его десятичные знаки можно вычислить последовательно:

$$1<\sqrt[4]{3}<2, \text{ так как } 1^4<3<2^4;$$
$$1{,}3<\sqrt[4]{3}<1{,}4, \text{ так как } 1{,}3^4<3<1{,}4^4 \text{ и т. д.}$$

(убедитесь, что $\sqrt[4]{3}=1{,}31607...$). ●

При нечетных значениях n функция $f(x)=x^n$ возрастает на всей числовой прямой; ее область значений — множество всех действительных чисел. Применяя теорему о корне, находим, что уравнение $x^n=a$ имеет один корень при любом a и, в частности, при $a<0$. Этот корень для любого значения a (в том числе и a отрицательного) обозначают $\sqrt[n]{a}$.

Итак, *при нечетном n существует корень n-й степени из любого числа a и притом только один.*

Для корней нечетной степени справедливо равенство

$$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}.$$

В самом деле,

$$(-\sqrt[n]{a})^n=(-1)^n\cdot(\sqrt[n]{a})^n=-1\cdot a=-a,$$

т. е. число $-\sqrt[n]{a}$ есть корень n-й степени из $-a$. Но такой корень при нечетном n единственный. Следовательно, $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$.

Равенство $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ (при нечетном n) позволяет выразить корень нечетной степени из отрицательного числа через арифметический корень той же степени. Например, $\sqrt[5]{-71}=-\sqrt[5]{71}$, $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$.

Замечание 1. Для любого действительного x

$$\sqrt[n]{x^n}=\begin{cases} |x|, & \text{если } n \text{ четно;} \\ x, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

(Докажите это свойство самостоятельно.)

Замечание 2. Удобно считать, что корень первой степени из числа a равен a. Как вы уже знаете, корень второй степени из числа называют *квадратным корнем*, а показатель 2 корня при записи опускают (например, корень квадратный из 7 обозначают просто $\sqrt{7}$). Корень третьей степени называют *кубическим корнем*.

○ **Пример 5.** Решим уравнение: а) $x^5=-11$; б) $x^8=7$.

а) По определению корня n-й степени число x — корень пятой степени из -11. Показатель корня — нечетное число 5,

поэтому такой корень существует и притом только один: это $\sqrt[5]{-11}$. Итак, $x=-\sqrt[5]{11}$.

б) По определению корня n-й степени решением уравнения $x^8=7$ является число $\sqrt[8]{7}$. Так как 8 — число четное, $-\sqrt[8]{7}$ также является решением данного уравнения. Итак, $x_1=\sqrt[8]{7}$, $x_2=-\sqrt[8]{7}$. Ответ можно записать так: $x=\pm\sqrt[8]{7}$. ●

2. Основные свойства корней. Напомним известные вам свойства арифметических корней n-й степени.

Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполнены равенства:

1⁰. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

2⁰. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b\neq 0)$.

3⁰. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $(k>0)$.

4⁰. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$ $(k>0)$.

5⁰. $\sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$ (если $k\leqslant 0$, то $a\neq 0$).

Докажем свойство 1⁰. По определению $\sqrt[n]{ab}$ — это такое неотрицательное число, n-я степень которого равна ab. Число $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ неотрицательно. Поэтому достаточно проверить справедливость равенства $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=ab$, которое вытекает из свойств степени с натуральным показателем и определения корня n-й степени: $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab$.

Аналогично доказываются следующие три свойства:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\geqslant 0 \text{ и } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\geqslant 0 \text{ и } \left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk}=\left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k=(\sqrt[k]{a})^k=a;$$

$$\sqrt[n]{a}\geqslant 0 \text{ и } (\sqrt[n]{a})^{nk}=((\sqrt[n]{a})^n)^k=a^k.$$

Докажем теперь свойство 5⁰. Заметим, что n-я степень числа $(\sqrt[n]{a})^k$ равна a^k:

$$((\sqrt[n]{a})^k)^n=(\sqrt[n]{a})^{kn}=((\sqrt[n]{a})^n)^k=a^k.$$

По определению арифметического корня $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$ (так как $(\sqrt[n]{a})^k\geqslant 0$).

Приведем примеры применения свойств 1⁰—5⁰ к решению задач на преобразование числовых выражений, содержащих корни.

○ Пример 6. Преобразуем выражения: а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}$; г) $\sqrt[21]{128}$; д) $\sqrt[7]{128^3}$.

а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{8\cdot 4}=\sqrt[5]{32}=2$ (свойство 1⁰);

б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}=\frac{3}{2}$ (свойство 2⁰);

в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}=\sqrt[15]{7}$ (свойство 3^0);

г) $\sqrt[21]{128}=\sqrt[21]{2^7}=\sqrt[3]{2}$ (свойство 4^0);

д) применяя свойство 5^0, находим $\sqrt[7]{128^3}=(\sqrt[7]{128})^3=2^3=8$. ●

Докажем следующее свойство арифметического корня:

6^0. *Для любых чисел a и b, таких, что* $0\leqslant a<b$, *выполняется неравенство* $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

Проведем доказательство методом от противного. Допустим, что $\sqrt[n]{a}\geqslant\sqrt[n]{b}$. Тогда по свойству степеней с натуральным показателем $(\sqrt[n]{a})^n\geqslant(\sqrt[n]{b})^n$, т. е. $a\geqslant b$. Это противоречит условию $a<b$.

○ Пример 7. Сравним числа $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[5]{3}$.

Представим $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[5]{3}$ в виде корней с одним и тем же показателем: $\sqrt[3]{2}=\sqrt[15]{2^5}=\sqrt[15]{32}$, а $\sqrt[5]{3}=\sqrt[15]{3^3}=\sqrt[15]{27}$ (свойство 4^0). Из неравенства $32>27$ по свойству 6^0 следует, что $\sqrt[15]{32}>\sqrt[15]{27}$, и, значит, $\sqrt[3]{2}>\sqrt[5]{3}$.

Пример 8. Решим неравенство $x^6>20$.

Это неравенство равносильно неравенству $x^6-20>0$. Так как функция $f(x)=x^6-20$ непрерывна, можно воспользоваться методом интервалов. Уравнение $x^6-20=0$ имеет два корня: $\sqrt[6]{20}$ и $-\sqrt[6]{20}$. Эти числа разбивают числовую прямую на три промежутка. Решение данного неравенства — объединение двух из них: $(-\infty;\ -\sqrt[6]{20})$ и $(\sqrt[6]{20};\ \infty)$. ●

Упражнения

Проверьте справедливость равенств (381—382).

381. а) $\sqrt[4]{16}=2$; б) $\sqrt[7]{-1}=-1$; в) $\sqrt[10]{1024}=2$; г) $\sqrt[5]{-243}=-3$.

382. а) $\sqrt[17]{1}=1$; б) $\sqrt[6]{64}=2$; в) $\sqrt[3]{-343}=-7$; г) $\sqrt[19]{0}=0$.

Вычислите (383—384).

383. а) $\sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{-32}$; г) $\sqrt[3]{64}$.

384. а) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$; в) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$.

Решите уравнения (385—388).

385. а) $x^3+4=0$; б) $x^6=5$; в) $x^3=4$; г) $x^4=10$.

386. а) $x^{10}-15=0$; б) $x^7+128=0$; в) $x^6-64=0$; г) $x^5=3$.

387. а) $16x^4-1=0$; б) $0{,}01x^3+10=0$; в) $0{,}02x^6-1{,}28=0$; г) $12\frac{3}{4}-\frac{3}{4}x^2=0$.

388. а) $\sqrt[3]{x}=-0{,}6$; б) $\sqrt[4]{x}=3$; в) $\sqrt{x}=5$; г) $\sqrt[7]{x}=-1$.

Найдите значение числового выражения (389—394).

389. а) $(-\sqrt[4]{11})^4$; б) $(2\sqrt[5]{-2})^5$; в) $(\sqrt[3]{7})^3$; г) $(-\sqrt[6]{2})^6$.

390. а) $\sqrt[4]{16\cdot625}$; б) $\sqrt[5]{32\cdot243}$; в) $\sqrt[3]{8\cdot343}$; г) $\sqrt[4]{0{,}0001\cdot16}$.

391. а) $\sqrt[5]{160\cdot625}$; б) $\sqrt[3]{24\cdot9}$; в) $\sqrt[4]{48\cdot27}$; г) $\sqrt[3]{75\cdot45}$.

392. а) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}$; б) $\sqrt[7]{16}\cdot\sqrt[7]{-8}$; в) $\sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[5]{9}$; г) $\sqrt[3]{-25}\cdot\sqrt[6]{25}$.

393. а) $\dfrac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$; г) $\dfrac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}}$.

394. а) $\sqrt[6]{\dfrac{64}{100\,000\,000}}\cdot\sqrt[4]{39\frac{1}{16}}:\sqrt[3]{-3\frac{19}{27}}$; б) $\sqrt[5]{1\frac{11}{16}\cdot4{,}5}-\dfrac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{288}}$;
в) $\sqrt[5]{-\dfrac{243}{1024}}\cdot\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$; г) $\sqrt[4]{3\frac{3}{8}\cdot1\frac{1}{2}}+\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}$.

395. Найдите первые два десятичных знака (после запятой) числа:
а) $\sqrt[4]{2}$; б) $\sqrt[3]{5}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt[3]{3}$.

Пользуясь таблицами или калькулятором, найдите приближенное значение корня с точностью до 0,01 (396—397).

396. а) $\sqrt[3]{10{,}17}$; б) $\sqrt{71}$; в) $\sqrt{13{,}21}$; г) $\sqrt[3]{11}$.

397. а) $\sqrt[5]{13{,}7}$; б) $\sqrt[6]{10}$; в) $\sqrt[4]{2{,}8}$; г) $\sqrt[8]{13}$.

Сравните числа (398—401).

398. а) $\sqrt[5]{0{,}2}$ и 0; б) $\sqrt[12]{0{,}4}$ и $\sqrt[12]{\dfrac{5}{12}}$; в) $\sqrt[7]{1{,}8}$ и 1; г) $\sqrt[8]{0{,}2}$ и $\sqrt[8]{0{,}3}$.

399. а) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ и $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2$; б) $\sqrt[18]{\dfrac{3}{7}}$ и $\sqrt[18]{0{,}43}$; в) $\sqrt[5]{2}$ и $\sqrt[5]{3}$;
г) $\sqrt[10]{0{,}8}$ и 1.

400. а) $\sqrt{0{,}3}$ и $\sqrt[5]{0{,}05}$; б) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[5]{8}$; в) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt[6]{40}$; г) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[8]{500}$.

401. а) $\sqrt[3]{-0{,}4}$ и $\sqrt[5]{-0{,}3}$; б) $\sqrt[5]{-5}$ и $\sqrt[3]{-3}$; в) $\sqrt[3]{-2}$ и $\sqrt[3]{-4}$;
г) $\sqrt[3]{-5}$ и $\sqrt[5]{-3}$.

402. Вынесите множитель за знак корня ($a>0$, $b>0$):
а) $\sqrt[6]{64a^8b^{11}}$; б) $\sqrt[5]{-128a^7}$; в) $\sqrt[4]{6a^{12}b^6}$; г) $\sqrt[3]{54a^{10}}$.

403. Внесите множитель под знак корня ($a>0$, $b>0$):
а) $-b\sqrt[4]{3}$; б) $ab\sqrt[8]{\dfrac{5b^3}{a^7}}$; в) $a\sqrt[4]{7}$; г) $-ab\sqrt[3]{-4}$.

При каких значениях a верно равенство (404—405)?

404. а) $\sqrt{a^2}=-a$; б) $\sqrt[3]{a^3}=a$; в) $\sqrt[5]{a^5}=|a|$; г) $\sqrt[4]{a^4}=a$.

405. а) $\sqrt[3]{a^3}=-a$; б) $\sqrt[6]{a^6}=-a$; в) $\sqrt[4]{a^4}=|a|$; г) $\sqrt[7]{a^7}=a$.

Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которой не содержит знака корня (406—407).

406. а) $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; б) $\frac{a-\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1}$.

407. а) $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; в) $\frac{4}{x\sqrt[4]{4}}$; г) $\frac{5}{3\sqrt[5]{5}}$.

Приведите числовое выражение к виду $a\sqrt[n]{b}$, где a — рациональное число, а b — натуральное (408—409).

408. а) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; б) $\frac{6}{\sqrt[5]{27\cdot 25}}$; в) $\frac{3}{\sqrt[4]{12}}$; г) $\frac{10}{\sqrt[5]{8}}$.

409. а) $\sqrt[12]{25^3}$; б) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{2}}$; в) $\sqrt[8]{\frac{16^3}{81}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{1}{4}\sqrt[3]{5}}$.

410. Решите уравнение с помощью подстановки $t=\sqrt[4]{x}$ или $t=\sqrt[6]{x}$:
а) $\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}+6=0$; б) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=2$; в) $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}+2=0$;
г) $\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}=6$.

Решите неравенства (411—412).

411. а) $x^4<3$; б) $x^{11}\geqslant 7$; в) $x^{10}>2$; г) $x^3\leqslant 5$.

412. а) $\sqrt[3]{x}<-7$; б) $\sqrt[6]{x}\geqslant 2$; в) $\sqrt[3]{x}>2$; г) $\sqrt[4]{x}\leqslant 3$.

Упростите выражения (413—414).

413. а) $\sqrt[6]{a^6}$, где $a\leqslant 0$; б) $\sqrt[4]{a^4}$, где $a\geqslant 0$;
в) $\sqrt[5]{a^5}$; г) $\sqrt{a^2}$, где $a\geqslant 0$.

414. а) $\sqrt[3]{a^3}-\sqrt{a^2}$, где $a\leqslant 0$; б) $\sqrt[4]{a^4}+2\sqrt[7]{a^7}$, где $a\geqslant 0$;
в) $\sqrt[5]{a^5}-\sqrt[6]{a^6}$, где $a\geqslant 0$; г) $\sqrt[3]{a^3}+3\sqrt[8]{a^8}$, где $a\leqslant 0$.

415. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{10+\sqrt{73}}\cdot\sqrt[3]{10-\sqrt{73}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}}+\sqrt{17}$;

в) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$; г) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

416. Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которой не содержит радикала:

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$; б) $\frac{2}{a-\sqrt[3]{b}}$; в) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}}$; г) $\frac{3a}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

33. Иррациональные уравнения

Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называют *иррациональными*. Таково, например, уравнение $\sqrt[3]{x}-2=0$.

○ Пример 1. Решим уравнение $\sqrt{x^2-5}=2$.

Возведем обе части этого уравнения в квадрат и получим $x^2-5=4$, откуда следует, что $x^2=9$, т. е. $x=3$ или $x=-3$.

Проверим, что полученные числа являются решениями уравнения. Действительно, при подстановке их в данное уравнение получаются верные равенства

$$\sqrt{3^2-5}=2 \text{ и } \sqrt{(-3)^2-5}=2.$$

Следовательно, $x=3$ и $x=-3$ — решения данного уравнения.

Пример 2. Решим уравнение $\sqrt{x}=x-2$.

Возведя в квадрат обе части уравнения, получим $x=x^2-4x+4$. После преобразований приходим к квадратному уравнению $x^2-5x+4=0$, корни которого $x=1$ и $x=4$. Проверим, являются ли найденные числа решениями данного уравнения. При подстановке в него числа 4 получаем верное равенство $\sqrt{4}=4-2$, т. е. 4 — решение данного уравнения. При подстановке же числа 1 получаем в правой части -1, а в левой части число 1. Следовательно, 1 не является решением уравнения; говорят, что это *посторонний корень*, полученный в результате принятого способа решения. Ответ: $x=4$. ●

Мы видим, что при решении иррациональных уравнений полученные решения требуют проверки, потому, например, что неверное равенство при возведении в квадрат может дать верное равенство. В самом деле, неверное равенство $1=-1$ при возведении в квадрат дает верное равенство $1^2=(-1)^2$.

○ Пример 3. Решим уравнение $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x}$.

Возведем обе части этого уравнения в квадрат: $x^2-2=x$, откуда получаем уравнение $x^2-x-2=0$, корни которого $x=-1$ и $x=2$. Сразу ясно, что число -1 не является корнем данного уравнения, так как обе части его не определены при $x=-1$. При подстановке в уравнение числа 2 получаем верное равенство $\sqrt{2^2-2}=\sqrt{2}$. Следовательно, решением данного уравнения является только число 2.

Пример 4. Решим уравнение $\sqrt{x-6}=\sqrt{4-x}$.

Возводя в квадрат обе части этого уравнения, получаем $x-6=4-x$, $2x=10$, $x=5$. Подстановкой убеждаемся, что число 5 не является корнем данного уравнения. Поэтому уравнение не имеет решений. ●

Иногда удобнее решать иррациональные уравнения, используя равносильные переходы.

○ Пример 5. Решим уравнение $\sqrt{x-2}=x-8$.

По определению $\sqrt{x-2}$ — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен подкоренному выражению. Другими словами, уравнение $\sqrt{x-2}=x-8$ равносильно системе

$$\begin{cases} x-2=(x-8)^2, \\ x-8\geqslant 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение системы, равносильное уравнению $x^2-17x+66=0$, получим корни 11 и 6, но условие $x-8\geqslant 0$ выполняется только для $x=11$. Поэтому данное уравнение имеет один корень $x=11$.

Пример 6. Решим уравнение $x-1=\sqrt[3]{x^2-x-1}$.

В отличие от рассмотренных ранее примеров данное иррациональное уравнение содержит не квадратный корень, а корень третьей степени. Поэтому для того, чтобы «избавиться от радикала», надо возвести обе части уравнения не в квадрат, а в куб: $(x-1)^3=x^2-x-1$. После преобразований получаем:

$$x^3-3x^2+3x-1=x^2-x-1,$$
$$x^3-4x^2+4x=0,$$
$$x(x^2-4x+4)=0,$$
$$x(x-2)^2=0.$$

Итак, $x_1=0$, $x_2=2$.

Пример 7. Решим систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28.\end{cases}$$

Положив $u=\sqrt[3]{x}$ и $v=\sqrt[3]{y}$, приходим к системе

$$\begin{cases}u+v=4,\\ u^3+v^3=28.\end{cases}$$

Разложим левую часть второго уравнения на множители: $u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2)$ — и подставим в него из первого уравнения $u+v=4$. Тогда получим систему, равносильную второй:

$$\begin{cases}u+v=4,\\ u^2-uv+v^2=7.\end{cases}$$

Подставляя во второе уравнение значение v, найденное из первого ($v=4-u$), приходим к уравнению

$$u^2-u(4-u)+(4-u)^2=7, \text{ т. е. } u^2-4u+3=0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня: $u_1=1$ и $u_2=3$. Соответствующие значения v таковы: $v_1=3$ и $v_2=1$. Переходя к переменным x и y, получаем: $\sqrt[3]{x}=u_1$, т. е. $x_1=u_1^3=1$, $y_1=v_1^3=27$, $x_2=u_2^3=27$, $y_2=v_2^3=1$. Ответ: (1; 27), (27; 1). ●

Упражнения

Решите уравнения (417—420).

417. а) $\sqrt{x^4+19}=10$; б) $\sqrt[3]{x^2-28}=2$;
в) $\sqrt{61-x^2}=5$; г) $\sqrt[3]{x-9}=-3$.

418. а) $\sqrt{x+1}=x-5$; б) $x+\sqrt{2x+3}=6$;

в) $\sqrt{2x-1}=x-2$;   г) $3+\sqrt{3x+1}=x$.

419. а) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2-2x+4}$;   б) $\sqrt{x}=\sqrt{x^2-x-3}$;

в) $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-3}$;   г) $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{x+9}$

420. а) $x=\sqrt[3]{x^3+x^2-6x+8}$;   б) $x-2=\sqrt[3]{x^2-8}$;

в) $x=\sqrt[3]{x^3-x^2-8x+20}$;   г) $x+1=\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}$.

421. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=1, \\ 3\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=2\sqrt{2}, \\ 2\sqrt[4]{x}+3\sqrt[4]{y}=8\sqrt{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=7, \\ 4\sqrt[4]{y}-3\sqrt[4]{x}=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=5\sqrt{5}, \\ 5\sqrt{y}-2\sqrt{x}=\sqrt{5}. \end{cases}$

Решите уравнения (422—425).

422. а) $\sqrt{x+1}\sqrt{x+6}=6$;   б) $\frac{x+1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{x-1}$;

в) $\frac{x+6}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{3x+2}$;   г) $\sqrt{x}\sqrt{2-x}=2x$.

423. а) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3$;   б) $\sqrt{\sqrt{x^2-16}+x}=2$;

в) $\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}}=4$;   г) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-5}}=1$.

424. а) $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4}$;   б) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$;

в) $2+\sqrt{10-x}=\sqrt{22-x}$;   г) $\sqrt{1-2x}-3=\sqrt{16+x}$.

425. а) $\sqrt{x-3}-6=\sqrt[4]{x-3}$;   б) $\sqrt[3]{x+1}+2\sqrt[6]{x+1}=3$;

в) $\sqrt[4]{x-5}=30-\sqrt{x-5}$;   г) $3\sqrt[10]{x^2-3}+\sqrt[5]{x^2-3}=4$.

Решите системы уравнений (426—427).

426. а) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10, \\ 4\sqrt{3y+4}-5\sqrt{6+x}=6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=10, \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}+\sqrt{5y+1}=8, \\ 3\sqrt{x-2}-2\sqrt{5y+1}=-2. \end{cases}$

427. а) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8, \\ x-y=16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5, \\ xy=216; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4, \\ x-y=32; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2, \\ xy=27. \end{cases}$

34. Степень с рациональным показателем

Вам уже знакомо понятие степени числа с целым показателем. Выражение a^n определено для всех a и n, кроме случая $a=0$ при $n\leqslant 0$. Напомним свойства таких степеней.

Для любых чисел a, b и любых целых чисел m и n справедливы равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\; a^m : a^n = a^{m-n} \;(a \neq 0);$$
$$(a^m)^n = a^{mn};$$
$$(ab)^n = a^n \cdot b^n;\; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \;(b \neq 0);$$
$$a^1 = a;\; a^0 = 1 \;(a \neq 0).$$

Отметим также следующее свойство:

Если $m > n$, то $a^m > a^n$ при $a > 1$ и $a^m < a^n$ при $0 < a < 1$.

В этом пункте мы обобщим понятие степени числа, придав смысл выражениям типа $2^{0,3}$, $8^{\frac{5}{7}}$, $4^{-\frac{1}{2}}$ и т. д. Естественно при этом дать определение так, чтобы степени с рациональными показателями обладали теми же свойствами (или хотя бы их частью), что и степени с целым показателем. Тогда, в частности, n-я степень числа $a^{\frac{m}{n}}$ должна быть равна a^m. Действительно, если свойство

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

выполняется, то

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

Последнее равенство означает (по определению корня n-й степени), что число $a^{\frac{m}{n}}$ должно быть корнем n-й степени из числа a^m.

О п р е д е л е н и е. ***Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное ($n > 1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$.***

Итак, по определению

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (1)$$

Степень числа 0 определена только для положительных показателей; по определению $0^r = 0$ для любого $r > 0$.

○ П р и м е р 1. По определению степени с рациональным показателем

$$7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7};\; 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32};\; a^{-\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{a^{-7}}.$$

П р и м е р 2. Найдем значения числовых выражений $8^{\frac{1}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $128^{-\frac{2}{7}}$.

Воспользовавшись определением степени с рациональным показателем и свойствами корней, имеем $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$, $81^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{81^3}=$ $=(\sqrt[4]{81})^3=3^3=27$, $128^{-\frac{2}{7}}=\sqrt[7]{128^{-2}}=(\sqrt[7]{128})^{-2}=2^{-2}=\frac{1}{4}$. ●

Замечание 1. Из определения степени с рациональным показателем сразу следует, что для любого положительного a и любого рационального r число a^r положительно.

Замечание 2. Любое рациональное число допускает различные записи его в виде дроби, поскольку $\frac{m}{n}=\frac{mk}{nk}$ для любого натурального k. Значение a^r также не зависит от формы записи рационального числа r. В самом деле, из свойств корней следует, что $a^{\frac{mk}{nk}}=\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

Замечание 3. При $a<0$ рациональная степень числа a не определяется, и это не случайно. Если бы мы сочли верной формулу (1) и для $a<0$, то, например, значение $(-8)^{\frac{1}{3}}$ равнялось бы $\sqrt[3]{-8}$, т. е. -2. Но, с другой стороны, $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, и поэтому должно выполняться равенство $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-8)^2}=$ $=\sqrt[6]{8^2}=2$.

Покажем теперь, что при сформулированном выше определении степени с рациональным показателем сохраняются основные свойства степеней, верные для любых показателей (разница заключается в том, что приводимые далее свойства верны только для положительных оснований).

Для любых рациональных чисел r и s и любых положительных a и b справедливы равенства:

1^0. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.
2^0. $a^r : a^s = a^{r-s}$.
3^0. $(a^r)^s = a^{rs}$.
4^0. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$.
5^0. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Для доказательства этих свойств надо воспользоваться определением степени с рациональным показателем и доказанными в п. 32 свойствами корней. Докажем, например, свойства 1^0, 3^0, и 4^0. Пусть $r=\frac{m}{n}$ и $s=\frac{p}{q}$, где n и q — натуральные числа, а m и p — целые. Тогда

$$a^r \cdot a^s = \sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\cdot\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{r+s};$$

$$(a^r)^s=\sqrt[q]{(a^r)^p}=\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p}=\sqrt[nq]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{nq}}=a^{rs};$$

$$(ab)^r=\sqrt[n]{(ab)^m}=\sqrt[n]{a^m b^m}=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{b^m}=a^r\cdot b^r.$$

Свойства 2^0 и 5^0 доказываются аналогично (проведите соответствующие рассуждения самостоятельно).

○ Пример 3. Найдем значение выражения $\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}$.

$$\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3\cdot 5}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=2^1\cdot 5^1=10.$$

Пример 4. Преобразуем выражения:

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$; б) $\dfrac{a^{1,2}-b^{2,1}}{a^{0,8}+a^{0,4}b^{0,7}+b^{1,4}}$.

а) $$\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\frac{(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{\frac{1}{4}})^2}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\frac{(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}};$$

б) $$\frac{a^{1,2}-b^{2,1}}{a^{0,8}+a^{0,4}b^{0,7}+b^{1,4}}=\frac{(a^{0,4})^3-(b^{0,7})^3}{(a^{0,4})^2+a^{0,4}b^{0,7}+(b^{0,7})^2}=a^{0,4}-b^{0,7}.$$ ●

Отметим следующие два свойства степеней с рациональными показателями:

6^0. *Пусть r — рациональное число и $0<a<b$. Тогда*

$$a^r<b^r \text{ при } r>0,$$
$$a^r>b^r \text{ при } r<0.$$

7^0. *Для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r>s$ следует, что*

$$a^r>a^s \text{ при } a>1;$$
$$a^r<a^s \text{ при } 0<a<1.$$

Докажем свойство 6^0. Если $r>0$, то r можно записать в виде $r=\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Из неравенства $0<a<b$ и свойств степени с целым показателем следует, что $a^m<b^m$. По свойству корней (свойство 6^0, п. 32) из этого неравенства получаем $\sqrt[n]{a^m}<\sqrt[n]{b^m}$, т. е. $a^r<b^r$.

В случае $r<0$ проводится аналогичное рассуждение.

Для доказательства свойства 7^0 приведем сначала рациональные числа r и s к общему знаменателю: $r=\frac{m}{n}$ и $s=\frac{p}{n}$, где n — натуральное число, а m и p — целые. Из неравенства $r>s$ сле-

дует, что $m>p$. Если $a>1$, то $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}>1$ и по свойству степени с целым показателем $(a^{\frac{1}{n}})^m>(a^{\frac{1}{n}})^p$.

Остается заметить, что $(a^{\frac{1}{n}})^m=a^{\frac{m}{n}}=a^r$ и $(a^{\frac{1}{n}})^p=a^{\frac{p}{n}}=a^s$.

Случай $0<a<1$ разбирается аналогично.

○ Пример 5. Сравним числа $\sqrt[5]{8}$ и $2^{\frac{2}{3}}$

Запишем $\sqrt[5]{8}$ в виде степени с рациональным показателем: $\sqrt[5]{8}=2^{\frac{3}{5}}$. По свойству 7^0 получаем $2^{\frac{2}{3}}>2^{\frac{3}{5}}$, так как $\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$.

Пример 6. Сравним числа 2^{300} и 3^{200}.

Запишем эти числа в виде степеней с одинаковым показателем:

$$2^{300}=(2^3)^{100}=8^{100};\ 3^{200}=(3^2)^{100}=9^{100}.$$

Так как $8<9$, по свойству 6^0 получаем:

$$8^{100}<9^{100},\text{ т. е. } 2^{300}<3^{200}. \bullet$$

Упражнения

428. Представьте в виде корня из числа выражение:

а) $3^{1,2}$; б) $5^{-\frac{2}{3}}$; в) $4^{1,25}$; г) $6^{-1\frac{1}{2}}$.

429. Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем:

а) $\sqrt[3]{a^{-2}}$; б) $\sqrt[7]{3b}$; в) $\sqrt[13]{b^{-7}}$; г) $\sqrt[8]{4^5}$.

Найдите значение числового выражения (430—431).

430. а) $243^{0,4}$; б) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; в) $16^{\frac{5}{4}}$; г) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$.

431. а) $8^{\frac{1}{2}}:(8^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{3}{2}})$; б) $\sqrt[3]{100}\cdot(\sqrt{2})^{\frac{8}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$;

в) $8^{2\frac{1}{3}}:81^{0,75}$; г) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5}\cdot\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Разложите на множители (432—433).

432. а) $(ax)^{\frac{1}{3}}+(ay)^{\frac{1}{3}}$; б) $a-a^{\frac{1}{2}}$; в) $3+3^{\frac{1}{2}}$; г) $(3x)^{\frac{1}{2}}-(5x)^{\frac{1}{2}}$.

433. а) $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}+1$; б) $c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}$;

в) $4-4^{\frac{1}{3}}$; г) $a+b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$.

Упростите выражения (434—435).

434. а) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{z-8}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}$;

в) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}$; г) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

435. а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{a-1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{3}{2}}-1}+2a^{\frac{1}{2}}$;

в) $\left(\dfrac{1}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$;

г) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

436. Сравните числа:

а) $\sqrt[7]{3^3}$ и $3^{\frac{19}{8}}$; б) $0{,}4^{-2{,}7}$ и $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{15}{7}}$;

в) $\sqrt[3]{6^5}$ и $6^{1{,}7}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$ и $\sqrt[7]{\frac{1}{32}}$.

---

437. Найдите значения выражения:

а) $81^{-0{,}75}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

б) $0{,}001^{-\frac{1}{3}}-(-2)^{-2}64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}}+(9^0)^2$;

в) $27^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}-25^{0{,}5}$;

г) $(-0{,}5)^{-4}-625^{0{,}25}-\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}+19(-3)^{-3}$.

438. Упростите выражение:

а) $\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1$;

б) $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

в) $\frac{a^{\frac{4}{3}}-27a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)-\sqrt[3]{a^2}$;

г) $\left(\frac{1}{m+\sqrt{2}}-\frac{m^2+4}{m^3+2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{m}\right)$.

439. Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем:

а) $\frac{1}{8}\sqrt[7]{2^5\cdot ax^3}$; б) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}$;

в) $\sqrt[7]{b^3}\cdot\sqrt[4]{b}$; г) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{27\sqrt[3]{x}}$.

440. Представьте выражение в виде корня:

а) $3\cdot 2^{-\frac{3}{5}}$; б) $a^{\frac{3}{4}}:b^{\frac{2}{5}}$; в) $2b^{-\frac{2}{3}}$; г) $b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{7}}$.

441. Сравните числа:

а) $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}}$ и $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$; б) 3^{600} и 5^{400};

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$ и $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{3}{14}}$; г) 7^{30} и 4^{40}.

442. Имеет ли смысл выражение:

а) $(-3)^{-\frac{1}{7}}$; б) $(-2)^{-4}$; в) $5^{\frac{2}{3}}$; г) $0^{-\frac{4}{7}}$?

443. Найдите область определения выражения:

а) $(x+1)^{-\frac{2}{7}}$; б) $x^{\frac{3}{5}}$; в) $x^{-\frac{3}{4}}$; г) $(x-5)^{\frac{2}{3}}$.

444. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^6=a$; б) $(a^4)^{\frac{1}{4}}=-a$;

в) $(a^8)^{\frac{1}{8}}=\frac{1}{|a|}$; г) $(a^{0,7})^{1\frac{3}{7}}=-a$?

§ 10. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

35. Показательная функция

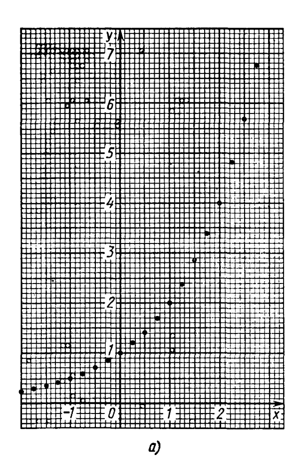
1. Степень с иррациональным показателем. Зафиксируем положительное число a и поставим в соответствие каждому числу $\frac{m}{n}$ число $a^{\frac{m}{n}}$. Тем самым получим числовую функцию $f(x)=a^x$, определенную на множестве Q рациональных чисел и обладающую перечисленными в п. 34 свойствами. При $a=1$ функция $f(x)=a^x$ постоянна, так как $1^x=1$ для любого рационального x.

Нанесем несколько точек графика функции $y=2^x$, предварительно вычислив с помощью калькулятора значения 2^x на отрезке $[-2; 3]$ с шагом $\frac{1}{4}$ (рис. 132, *а*), а затем с шагом $\frac{1}{8}$ (рис. 132, *б*). Продолжая мысленно такие же построения с шагом $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ и т. д., мы видим, что получающиеся точки можно соединить плавной кривой, которую естественно считать графиком некоторой функции, определенной и возрастающей уже на всей числовой прямой и принимающей значения $2^{\frac{m}{n}}$ в рациональных точках $x=\frac{m}{n}$ (рис. 132, *в*). Построив достаточно большое число точек графика функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, можно убедиться в том, что аналогичными свойствами обладает и эта функция (отличие состоит в том, что функция $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывает на $\boldsymbol{R}$.

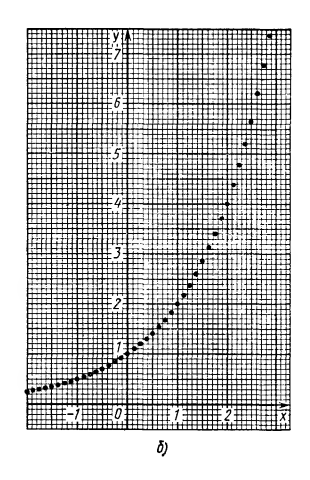
Эти наблюдения подсказывают, что можно так определить числа 2^α и $\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$ для каждого иррационального α, что функции, задаваемые формулами $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, будут непрерывными, причем функция $y=2^x$ возрастает, а функция $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывает на всей числовой прямой.

Опишем в общих чертах, как определяется число a^α для иррациональных α при $a>1$. Мы хотим добиться того, чтобы функция $y=a^x$ была возрастающей. Тогда при любых рациональных r_1 и r_2, таких, что $r_1<\alpha<r_2$, значение a^α должно удовлетворять неравенствам $a^{r_1}<a^\alpha<a^{r_2}$.

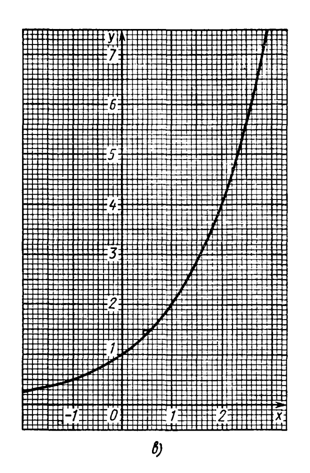
Выбирая значения r_1 и r_2, приближающиеся к x, можно заметить, что и соответствующие значения a^{r_1} и a^{r_2} будут мало отличаться. Можно доказать, что существует, и притом только одно, число y, которое больше всех a^{r_1} для всех рациональных r_1 и меньше всех a^{r_2} для всех рациональных r_2. Это число y по определению есть a^α.



а)



б)



в)

Рис. 132

Например, вычислив с помощью калькулятора значения 2^x в точках x_n и x'_n, где x_n и x'_n — десятичные приближения числа $x=\sqrt{3}$, мы обнаружим, что, чем ближе x_n и x'_n к $\sqrt{3}$, тем меньше отличаются 2^{x_n} и $2^{x'_n}$.

Так как $1<\sqrt{3}<2$, то

$$2^1=2<2^{\sqrt{3}}<2^2=4.$$

$1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$ и, значит,

$$2^{1,7}\approx 3{,}2490096<2^{\sqrt{3}}<2^{1,8}\approx 3{,}4822022.$$

Аналогично, рассматривая следующие десятичные приближения $\sqrt{3}$ по недостатку и избытку, приходим к соотношениям:

$$2^{1,73}\approx 3{,}3172782<2^{\sqrt{3}}<2^{1,74}\approx 3{,}3403517;$$

$$2^{1,732}\approx 3{,}3218801<2^{\sqrt{3}}<2^{1,733}\approx 3{,}3241834;$$

$$2^{1,7320}\approx 3{,}321801<2^{\sqrt{3}}<2^{1,7321}\approx 3{,}3221104;$$

$$2^{1,73205}\approx 3{,}3219952<2^{\sqrt{3}}<2^{1,73206}\approx 3{,}3220182;$$

$$2^{1,732050}\approx 3{,}3219952<2^{\sqrt{3}}<2^{1,732051}\approx 3{,}3219975.$$

Значение $2^{\sqrt{3}}$, вычисленное на калькуляторе, таково:

$$2^{\sqrt{3}}\approx 3{,}321997.$$

Аналогично определяется число a^α для $0<\alpha<1$. Кроме того, полагают $1^\alpha=1$ для любого α и $0^\alpha=0$ для $\alpha>0$.

2. Свойства показательной функции.

Определение. **Функция, заданная формулой $y=a^x$ (где $a>0$, $a\neq 1$), называется *показательной функцией с основанием a*.**

Сформулируем основные свойства показательной функции (их доказательство выходит за рамки школьного курса).

1. *Область определения — множество R действительных чисел.*

2. *Область значений — множество R_+ всех положительных действительных чисел.*

3. *При $a>1$ функция возрастает на всей числовой прямой; при $0<a<1$ функция убывает на множестве R.*

Графики показательных функций для случаев $a>1$ и $0<a<1$ изображены на рисунках 133—134.

4. *При любых действительных значениях x и y справедливы равенства*

$$a^xa^y=a^{x+y};\ \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y};$$

$$(ab)^x=a^xb^x;\ \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x};$$

$$(a^x)^y=a^{xy}.$$

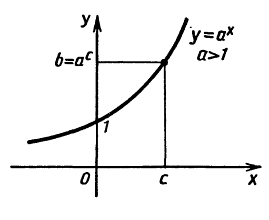


Рис. 133

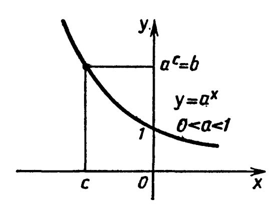


Рис. 134

Эти формулы называют *основными свойствами степеней.*

Свойства 3 и 4 означают, что для функции $y=a^x$, определенной на всей числовой прямой, остаются верными свойства функции $y=a^x$, которая сначала была определена только для рациональных x (см. свойства 1^0-7^0, п. 34).

Упражнения

445. Перечислите свойства функции и постройте ее график:

а) $y=4^x$; б) $y=0{,}2^x$; в) $y=0{,}7^x$; г) $y=2{,}5^x$.

446. Найдите область значений функции:

а) $y=-2^x$; б) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$; в) $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^x$; г) $y=5^x-2$.

447. Сравните числа:

а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ и 1; б) $3^{-\sqrt{12}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{2{,}8}$;

в) $2{,}5^{-\sqrt{2}}$ и 1; г) $0{,}3^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ и $0{,}3^{\frac{1}{3}}$.

448. Вычислите:

а) $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$; б) $3^{1-2\sqrt{3}}\cdot 9^{1+\sqrt{3}}$; в) $8^{\sqrt{2}}:2^{3\sqrt{2}}$; г) $(3^{\sqrt[5]{8}})^{\sqrt[5]{4}}$.

Упростите выражения (449—450).

449. а) $a^{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$; б) $x^{\pi}\cdot\sqrt[4]{x^2:x^{4\pi}}$;

в) $(a^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}$; г) $y^{\sqrt{2}}\cdot y^{1{,}3}:\sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}}$.

450. а) $\frac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}})^2}+1$; б) $\frac{(a^{2\sqrt{3}}-1)(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+a^{3\sqrt{3}})}{a^{4\sqrt{3}}-a^{\sqrt{3}}}$;

в) $\dfrac{a^{\sqrt{5}}-b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$; г) $\sqrt{(x^{\pi}+y^{\pi})^2-(4^{\frac{1}{\pi}}xy)^{\pi}}$.

---

451. Вычислите с точностью до 0,1 (пользуясь таблицами или калькулятором) значения:

а) $10^{1,41}$ и $10^{1,42}$; б) $10^{1,414}$ и $10^{1,415}$;
в) $10^{2,23}$ и $10^{2,24}$; г) $10^{2,236}$ и $10^{2,237}$.

452. Пользуясь полученными в задаче 451 результатами, найдите значения $10^{\sqrt{2}}$ и $10^{\sqrt{5}}$ с точностью до 0,2.

453. Укажите, какая из данных функций является возрастающей, какая — убывающей на множестве $\boldsymbol{R}$:

а) $y=(\sqrt{2})^x$, $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; б) $y=(\sqrt{5}-2)^x$, $y=\frac{1}{(\sqrt{5}-2)^x}$;
в) $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^x$; г) $y=(3-\sqrt{7})^x$, $y=\frac{1}{(3-\sqrt{7})^x}$.

454. Найдите область значений функции:

а) $y=3^{x+1}-3$; б) $y=|2^x-2|$; в) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$; г) $y=4^{|x|}$.

455. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на $\boldsymbol{R}$:

а) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$; б) $y=5+3^{|\cos x|}$;
в) $y=4^{\cos x}$; г) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|}-2$.

456. Найдите знак корня уравнения:

а) $\left(\frac{1}{6}\right)^x=10$; б) $0,3^x=0,1$; в) $10^x=4$; г) $0,7^x=5$.

Решите графически уравнения (457—458).

457. а) $3^x=4-x$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x+3$;
в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x+1$; г) $4^x=5-x$.

458. а) $3^{1-x}=2x-1$; б) $4^x+1=6-x$;
в) $2^x-2=1-x$; г) $3^{-x}=-\frac{3}{x}$.

459. Верно ли, что показательная функция $f(x)=a^x$:
а) имеет экстремумы;
б) принимает наибольшее значение в некоторой точке x_0;
в) принимает в некоторой точке значение, равное нулю;
г) является четной (нечетной)?

36. Решение показательных уравнений и неравенств

1. Уравнения. Рассмотрим простейшее показательное уравнение

$$a^x = b, \qquad (1)$$

где $a>0$ и $a \neq 1$. Область значений функции $y=a^x$ — множество положительных чисел. Поэтому в случае $b<0$ или $b=0$ уравнение (1) не имеет решений.

Пусть $b>0$. Функция $y=a^x$ на промежутке $(-\infty;\ \infty)$ возрастает при $a>1$ (убывает при $0<a<1$) и принимает все положительные значения. Применяя теорему о корне (п. 8), получаем, что уравнение (1) при любом положительном a, отличном от 1, и $b>0$ имеет единственный корень. Для того чтобы его найти, надо b представить в виде $b=a^c$. Очевидно, что c является решением уравнения $a^x=a^c$ (рис. 134).

○ Пример 1. Решим уравнение $7^{x-2}=\sqrt[3]{49}$.

Заметим, что $49=7^2$, а $\sqrt[3]{49}=7^{\frac{2}{3}}$. Поэтому данное уравнение можно записать в виде $7^{x-2}=7^{\frac{2}{3}}$. Следовательно, корнями данного уравнения являются такие числа x, для которых $x-2=$ $=\frac{2}{3}$, т. е. $x=2\frac{2}{3}$. Ответ: $x=2\frac{2}{3}$.

Пример 2. Решим уравнение $5^{x^2-2x-1}=25$.

Перепишем его в виде $5^{x^2-2x-1}=5^2$. Корнями этого уравнения являются такие числа x, для которых $x^2-2x-1=2$. Приходим к квадратному уравнению, корни которого — числа 3 и -1. Ответ: 3; -1.

Пример 3. Решим уравнение $6^{x+1}+35\cdot 6^{x-1}=71$.

Заметим, что $6^{x+1}=36\cdot 6^{x-1}$. Поэтому данное уравнение можно записать в виде $36\cdot 6^{x-1}+35\cdot 6^{x-1}=71$, т. е. $71\cdot 6^{x-1}=71$, откуда $6^{x-1}=6^0$, $x-1=0$, $x=1$. Ответ: 1.

Пример 4. Решим уравнение $4^x-5\cdot 2^x+4=0$.

Сделаем замену переменной $t=2^x$. Заметим, что $4^x=(2^x)^2=t^2$. Поэтому данное уравнение принимает вид $t^2-5t+4=0$. Найдем решения этого квадратного уравнения: $t_1=1$ и $t_2=4$. Решая уравнения $2^x=1$ и $2^x=4$, получаем $x=0$ и $x=2$. Ответ: 0; 2. ●

2. Неравенства и системы уравнений. Решение простейших показательных неравенств основано на известном свойстве функции $y=a^x$: эта функция возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$.

○ Пример 5. Решим неравенство $0{,}5^{7-3x}<4$.

Пользуясь тем, что $0{,}5^{-2}=4$, перепишем заданное неравенство в виде $0{,}5^{7-3x}<0{,}5^{-2}$. Показательная функция $y=0{,}5^x$ убывает (основание 0,5 меньше 1). Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $7-3x>-2$, откуда $x<3$. Ответ: $(-\infty;\ 3)$.

Пример 6. Решим неравенство $6^{x^2+2x}>6^3$.

Показательная функция $y=6^x$ возрастает. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $x^2+2x>3$, решая которое, получим ответ: $(-\infty;\ -3)$ и $(1;\ \infty)$.

Пример 7. Решим неравенство $\left(\frac{1}{9}\right)^x-\frac{28}{3^{x+1}}+3<0$.

Сделаем замену $t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, тогда $\left(\frac{1}{9}\right)^x=t^2$ и неравенство перепишется в виде $t^2-\frac{28}{3}t+3<0$, откуда $\frac{1}{3}<t<9$. Следовательно, решением данного неравенства являются числа x, удовлетворяющие неравенством $\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<9$, и только такие числа. Но $\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^1$, $9=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, а функция $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывает, поскольку $\frac{1}{3}<1$. Поэтому решением неравенства $\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<9$ будут числа x, удовлетворяющие неравенствам $-2<x<1$. Ответ: $(-2;\ 1)$.

Пример 8. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x+2^y=12, \\ 3^{2x-y}=3. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $2x-y=1$, откуда $y=2x-1$. Подставляя вместо y в первое уравнение выражение $2x-1$, получим $2^x+2^{2x-1}=12$, откуда $2^x+\frac{1}{2}\cdot 2^{2x}=12$. Обозначив 2^x через t, приходим к квадратному уравнению $t^2+2t-24=0$, откуда $t_1=-6$; $t_2=4$. Уравнение замены $2^x=-6$ решений не имеет. Корнем уравнения $2^x=4$ является число $x=2$. Соответствующее значение y равно 3. Ответ: $(2;\ 3)$. ●

Упражнения

Решите уравнения (460—464).

460. а) $4^x=64$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=27$; в) $3^x=81$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{64}$.

461. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$; б) $\sqrt{8^{x-3}}=\sqrt[3]{4^{2-x}}$;
в) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x}=36$; г) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1}=\left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$.

462. а) $3^{6-x}=3^{3x-2}$; б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5}=\frac{\sqrt{7}}{7}$;
в) $\sqrt{3^x}=9$; г) $2^{x^2+2x-0,5}=4\sqrt{2}$.

463. а) $7^{x+2}+4\cdot 7^{x+1}=539$; б) $2\cdot 3^{x+1}-3^x=15$;
в) $4^{x+1}+4^x=320$; г) $3\cdot 5^{x+3}+2\cdot 5^{x+1}=77$.

464. а) $9^x-8\cdot 3^x-9=0$;   б) $100^x-11\cdot 10^x+10=0$;
в) $36^x-4\cdot 6^x-12=0$;   г) $49^x-8\cdot 7^x+7=0$.

465. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4^{x+y}=16, \\ 4^{x+2y-1}=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6^{3x-y}=\sqrt{6}, \\ 2^{y-2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^{2y-x}=\frac{1}{81}, \\ 3^{x-y+2}=27; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-y}=25, \\ 7^{9x-y}=\sqrt{7}. \end{cases}$

Решите неравенства (466—467).

466. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x\geqslant 27$;   б) $(\sqrt{6})^x\leqslant\frac{1}{36}$;
в) $0{,}2^x\leqslant\frac{1}{25}$;   г) $(1{,}5)^x<2{,}25$.

467. а) $4^{5-2x}\leqslant 0{,}25$;   б) $0{,}3^{7+4x}>0{,}027$;
в) $0{,}4^{2x+1}>0{,}16$;   г) $3^{2-x}<27$.

Решите уравнения (468—470).

468. а) $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-2}=75$;   б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}-\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}=4{,}8$;
в) $5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=162$;   г) $5\cdot 9^x+9^{x-2}=406$.

469. а) $2^{x-2}=3^{x-2}$;   б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}$;
в) $5^{x+1}=8^{x+1}$;   г) $7^{x-2}=4^{2-x}$.

470. а) $3^x+3^{3-x}=12$;   б) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$;
в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}-\left(\frac{1}{5}\right)^x=4{,}96$;   г) $4^x-0{,}25^{x-2}=15$.

471. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5^{x+y}=125, \\ 4^{(x-y)^2-1}=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=5, \\ 4^x+4^y=80; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^x+3^y=12, \\ 6^{x+y}=216; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4^{x+y}=128, \\ 5^{3x-2y-3}=1. \end{cases}$

Решите неравенства (472—474).

472. а) $2^{x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$;   б) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x}<(\sqrt{5})^{x^2+3{,}75}$;
в) $3^{4x+3}\leqslant\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x^2}{2}}$;   г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10x}>64^{2\frac{2}{3}-x^2}$.

473. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}>2{,}5$;   б) $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}<448$;

в) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1}-\left(\frac{4}{3}\right)^{x}>\frac{3}{16}$; г) $3^{x+2}+3^{x-1}<28$.

474. а) $\pi^{x}-\pi^{2x}\geqslant 0$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}-10\cdot 3^{-x}+3<0$;

в) $4^{x}-2^{x+1}-8>0$; г) $\left(\frac{1}{36}\right)^{x}-5\cdot 6^{-x}-6\leqslant 0$.

475. Решите графически неравенство:

а) $2^{x}\leqslant 3-x$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\leqslant 2x+5$;

в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\geqslant 2x+1$; г) $3^{x}\geqslant 4-x$.

37. Логарифмы и их свойства

1. Логарифм. Вернемся к уравнению $a^{x}=b$, где $a>0$ и $a\neq 1$. Как показано в предыдущем пункте, это уравнение не имеет решений при $b\leqslant 0$ и имеет единственный корень в случае $b>0$. Этот корень называют логарифмом b по основанию a и обозначают $\log_a b$, т. е.

$$a^{\log_a b}=b.$$

Определение. ***Логарифмом*** **числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b.**

Формулу $a^{\log_a b}=b$ (где $b>0$, $a>0$ и $a\neq 1$) называют *основным логарифмическим тождеством.*

○ Пример 1. Найдем значение: а) $\log_2 32$; б) $\log_5 0{,}04$.

а) Заметим, что $32=2^5$, т. е. для того чтобы получить число 32, надо 2 возвести в пятую степень. Следовательно, $\log_2 32=5$.

б) Заметим, что $0{,}04=\frac{1}{25}=5^{-2}$, поэтому $\log_5 0{,}04=-2$.

Пример 2. Найдем логарифм числа $\frac{1}{9}$ по основанию $\sqrt{3}$.

Заметим, что $(\sqrt{3})^{-4}=\frac{1}{9}$. Поэтому по определению логарифма $\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{9}=-4$.

Пример 3. Найдем x, такое, что: а) $\log_8 x=\frac{1}{3}$; б) $\log_x 8=-\frac{3}{4}$.

Воспользуемся основным логарифмическим тождеством:

а) $x=8^{\log_8 x}=8^{\frac{1}{3}}=2$;

б) $x^{\log_x 8}=8$, т. е. $x^{-\frac{3}{4}}=8$, откуда $x=8^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{16}$. ●

2. Основные свойства логарифмов. При работе с логарифмами применяются следующие их свойства, вытекающие из свойств показательной функции:

При любом $a>0$ ($a\neq 1$) и любых положительных x и y выполнены равенства:

1^0. $\log_a 1=0$.

2^0. $\log_a a=1$.

3^0. $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$.

4^0. $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$.

5^0. $\log_a x^p=p\log_a x$

для любого действительного p.

Для доказательства правила 3^0 воспользуемся основным логарифмическим тождеством:

$$x=a^{\log_a x},\quad y=a^{\log_a y}. \tag{1}$$

Перемножая почленно эти равенства, получаем:

$$xy=a^{\log_a x}\cdot a^{\log_a y}=a^{\log_a x+\log_a y},$$

т. е. $xy=a^{\log_a x+\log_a y}$. Следовательно, по определению логарифма $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$.

Коротко говорят, что *логарифм произведения равен сумме логарифмов.*

Правило 4^0 докажем вновь с помощью равенств (1):

$$\frac{x}{y}=\frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}}=a^{\log_a x-\log_a y},$$

следовательно, по определению $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_b y$.

Говорят, что *логарифм частного равен разности логарифмов.*

Для доказательства правила 5^0 воспользуемся тождеством $x=a^{\log_a x}$, откуда $x^p=(a^{\log_a x})^p=a^{p\log_a x}$. Следовательно, по определению $\log_a x^p=p\log_a x$.

Говорят, что *логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени.*

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы. Докажем, например, *формулу перехода* от одного основания логарифма к другому основанию:

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

(Эта формула верна, если обе ее части имеют смысл, т. е. при $x>0$, $a>0$ и $a\neq 1$, $b>0$ и $b\neq 1$.)

По правилу логарифмирования степени и основному логарифмическому тождеству получаем:

$$\log_b x = \log_b (a^{\log_a x}),$$

откуда

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Разделив обе части полученного равенства на $\log_b a$, приходим к нужной формуле.

С помощью формулы перехода можно найти значение логарифма с произвольным основанием a, имея таблицы логарифмов, составленные для какого-нибудь одного основания b. Наиболее употребительны таблицы десятичных и натуральных логарифмов (*десятичными* называют логарифмы по основанию 10 и обозначают lg, а с натуральными логарифмами вы познакомитесь в п. 41).

○ Пример 4. Найдем $\log_{0,3} 7$.

Пользуясь калькулятором (или таблицами), находим $\lg 7 \approx \approx 0{,}8451$, $\lg 0{,}3 \approx 0{,}4771 - 1 = -0{,}5229$. Следовательно, по формуле перехода $\log_{0,3} 7 \approx \frac{0{,}8451}{-0{,}5229} \approx -1{,}6162$.

Пример 5. Известно, что $\log_2 5 = a$ и $\log_2 3 = b$. Выразим $\log_2 300$ через a и b.

Пользуясь основными свойствами логарифмов, получаем:

$$\log_2 300 = \log_2 (3 \cdot 5^2 \cdot 2^2) = \log_2 3 + 2 \log_2 5 + 2 \log_2 2 = b + 2a + 2.$$

Пример 6. Выразим логарифм выражения $8a^3 \sqrt[7]{b^4}$ через $\log_2 a$ и $\log_2 b$. (Коротко говорят: прологарифмируем данное выражение по основанию 2.)

Пользуясь основными свойствами логарифмов, получаем:

$$\log_2 (8a^3 \sqrt[7]{b^4}) = \log_2 (2^3 \cdot a^3 \cdot b^{\frac{4}{7}}) = 3 \log_2 2 + 3 \log_2 a + \frac{4}{7} \log_2 b =$$

$$= 3 + 3 \log_2 a + \frac{4}{7} \log_2 b.$$

Пример 7. Найдем x, если

$$\log_5 x = \log_5 7 + 2 \log_5 3 - 3 \log_5 2.$$

Сначала преобразуем правую часть данного равенства, пользуясь основными свойствами логарифмов:

$$\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 3^2 - \log_5 2^3 = \log_5 \frac{7 \cdot 9}{8} = \log_5 \frac{63}{8},$$

т. е. $\log_5 x = \log_5 \frac{63}{8}$ и потому $x = \frac{63}{8} = 7{,}875$.

Пример 8. Найдем значение выражения $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7}$.

Пользуясь основными свойствами логарифмов, преобразуем числитель и знаменатель этой дроби: $\lg 72 - \lg 9 = \lg \frac{72}{9} =$

$=\lg 8=3\lg 2$; $\lg 28-\lg 7=\lg\frac{28}{7}=\lg 4=2\lg 2$. Следовательно, $\frac{\lg 72-\lg 9}{\lg 28-\lg 7}=\frac{3\lg 2}{2\lg 2}=\frac{3}{2}$. ●

Упражнения

Найдите логарифм по основанию a числа, представленного в виде степени с основанием a (476—478).

476. а) $3^2=9$; б) $2^{-3}=\frac{1}{8}$; в) $4^2=16$; г) $5^{-2}=\frac{1}{25}$.

477. а) $9^{\frac{1}{2}}=3$; б) $7^0=1$; в) $32^{\frac{1}{5}}=2$; г) $3^{-1}=\frac{1}{3}$

478. а) $27^{\frac{2}{3}}=9$; б) $32^{\frac{3}{5}}=8$; в) $81^{\frac{3}{4}}=27$; г) $125^{\frac{2}{3}}=25$.

Проверьте справедливость равенств (479—482).

479. а) $\log_3\frac{1}{81}=-4$; б) $\log_{16}1=0$; в) $\log_4 16=2$; г) $\log_5 125=3$.

480. а) $\log_5 0{,}04=-2$; б) $\log_7 343=3$;
в) $\lg 0{,}01=-2$; г) $\log_3\frac{1}{243}=-5$.

481. а) $\log_{\sqrt{2}} 8=6$; б) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27=-6$;
в) $\log_{\frac{1}{3}} 9=-2$; г) $\log_{0{,}5} 4=-2$.

482. а) $\log_{2\sqrt{2}} 128=\frac{14}{3}$; б) $\log_{0{,}2} 0{,}008=3$;
в) $\log_{\sqrt{5}} 0{,}2=-2$; г) $\log_{0{,}2} 125=-3$.

483. Найдите логарифмы данных чисел по основанию a:

а) 25, $\frac{1}{5}$, $\sqrt{5}$ при $a=5$; б) 64, $\frac{1}{8}$, 2 при $a=8$,
в) 16, $\frac{1}{4}$, $\sqrt{2}$ при $a=2$; г) 27, $\frac{1}{9}$, $\sqrt{3}$ при $a=3$.

Найдите число x (484—486).

484. а) $\log_3 x=-1$; б) $\log_{\frac{1}{6}} x=-3$; в) $\log_5 x=2$; г) $\log_7 x=-2$.

485. а) $\log_4 x=-3$; б) $\log_{\sqrt{5}} x=0$; в) $\log_{\frac{1}{7}} x=1$; г) $\log_{\frac{1}{2}} x=-3$.

486. а) $\log_x 81=4$; б) $\log_x\frac{1}{16}=2$; в) $\log_x\frac{1}{4}=-2$; г) $\log_x 27=3$.

487. Запишите число в виде логарифма с основанием a:

а) 2; $\frac{1}{2}$, 1; 0 при $a=4$; б) 3; -1; -3; 1 при $a=3$;

в) 3; $\frac{1}{2}$; 0; -1 при $a=2$; г) 1; -2; 0; 3 при $a=5$.

Упростите выражения, пользуясь основным логарифмическим тождеством (488—490).

488. а) $1{,}7^{\log_{1,7} 2}$ б) $\pi^{\log_\pi 5{,}2}$; в) $2^{\log_2 5}$; г) $3{,}8^{\log_{3,8} 11}$.

489. а) $5^{1+\log_5 3}$; б) $10^{1-\lg 2}$; в) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+\log_{\frac{1}{7}} 2}$; г) $3^{2-\log_3 18}$.

490. а) $4^{2\log_4 3}$; б) $5^{-3\log_5 \frac{1}{2}}$, в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4\log_{\frac{1}{2}} 3}$; г) $6^{-2\log_6 5}$.

491. Прологарифмируйте по основанию 3 ($a>0$, $b>0$):

а) $(\sqrt[5]{a^3b})^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0{,}2}$; в) $9a^4\sqrt[5]{b}$; г) $\frac{b^2}{27a^7}$.

Прологарифмируйте по основанию 10, где $a>0$, $b>0$, $c>0$ (492—493).

492. а) $100\sqrt{ab^3c}$; б) $\frac{a^5}{0{,}1c^2\sqrt{b}}$; в) $\sqrt[3]{10}a^{\frac{1}{3}}b^4c^{-\frac{1}{2}}$, г) $\frac{0{,}01c^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}b^3}$.

493. а) $10^3a^4b^{\frac{1}{2}}c^{\ 3}$, б) $\frac{b^{\frac{2}{3}}}{10^5a^6c^5}$, в) $10^{-4}a^2b^5c^{\frac{2}{3}}$, г) $\frac{c^{\frac{7}{4}}}{10^7a^{\frac{2}{3}}b^8}$.

---

494. Известно, что $\log_5 2=a$ и $\log_5 3=b$. Выразите через a и b:

а) $\log_5 72$; б) $\log_5 15$; в) $\log_5 12$; г) $\log_5 30$.

Вычислите (495—496).

495. а) $\lg 8+\lg 125$; б) $\log_2 7-\log_2 \frac{7}{16}$;

в) $\log_{12} 4+\log_{12} 36$; г) $\lg 13-\lg 130$.

496. а) $\frac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3}$, б) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4}$;

в) $\log_2 11-\log_2 44$; г) $\log_{0,3} 9-2\log_{0,3} 10$.

497. Найдите x, если:

а) $\log_6 x=3\log_6 2+0{,}5\log_6 25-2\log_6 3$;

б) $\lg x=\frac{1}{2}\lg 5a-3\lg b+4\lg c$,

в) $\lg x = 5 \lg m + \frac{2}{3} \lg n - \frac{1}{4} \lg p$;

г) $\log_4 x = \frac{1}{3} \log_4 216 - 2 \log_4 10 + 4 \log_4 3$.

498. Докажите:

а) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$; б) $4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4}$;

в) $\log_3 7 + \log_7 3 > 2$; г) $3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$.

38. Логарифмическая функция

Пусть a — положительное число, не равное 1.

Определение. **Функцию, заданную формулой**

$$y = \log_a x, \tag{1}$$

называют *логарифмической функцией с основанием a*.

Перечислим основные свойства логарифмической функции.

1. *Область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел* $\boldsymbol{R}_+$, т. е. $D(\log_a) = \boldsymbol{R}_+$.

Действительно, как отмечалось в предыдущем пункте, каждое положительное число x имеет логарифм по основанию a.

2. *Область значений логарифмической функции — множество всех действительных чисел.*

В самом деле, по определению логарифма любого действительного y справедливо равенство

$$\log_a (a^y) = y, \tag{2}$$

т. е. функция $y = \log_a x$ принимает значение y_0 в точке $x_0 = a^{y_0}$.

3. *Логарифмическая функция на всей области определения возрастает (при $a > 1$) или убывает (при $0 < a < 1$).*

Докажем, например, что при $a > 1$ функция возрастает (в случае $0 < a < 1$ проводится аналогичное рассуждение).

Пусть x_1 и x_2 — произвольные положительные числа и $x_2 > x_1$. Надо доказать, что $\log_a x_2 > \log_a x_1$. Допустим противное, т. е. что

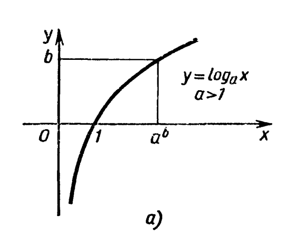
$$\log_a x_2 \leqslant \log_a x_1. \tag{3}$$

Так как показательная функция $y = a^x$ при $a > 1$ возрастает, из неравенства (3) следует:

$$a^{\log_a x_2} \leqslant a^{\log_a x_1}. \tag{4}$$

Но $a^{\log_a x_2} = x_2$, $a^{\log_a x_1} = x_1$ (по определению логарифма), т. е. неравенство (4) означает, что $x_2 \leqslant x_1$. Это противоречит допущению $x_2 > x_1$.

Для построения графика заметим, что значение 0 логарифмическая функция принимает в точке 1; $\log_a 1 = 0$ при любом $a > 0$, так как $a^0 = 1$.



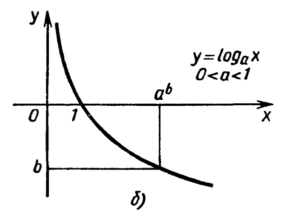


Рис. 135

Вследствие возрастания функции при $a>1$ получаем, что при $x>1$ логарифмическая функция принимает положительные значения, а при $0<x<1$ — отрицательные.

Если $0<a<1$, то $y=\log_a x$ убывает на R_+, поэтому $\log_a x>0$ при $0<x<1$ и $\log_a x<0$ при $x>1$.

Опираясь на доказанные свойства, нетрудно построить график функции $y=\log_a x$ при $a>1$ (рис. 135, *а*) и $0<a<1$ (рис. 135, *б*).

Справедливо следующее утверждение (доказательство см. в п. 40):

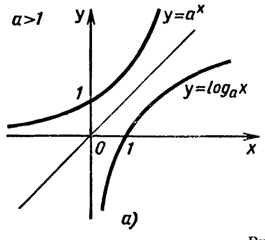
Графики показательной и логарифмической функций, имеющих одинаковое основание, симметричны относительно прямой $y=x$ (рис. 136).

Рассмотрим примеры применения свойств логарифмической функции.

○ Пример 1. Найдем область определения функции

$$f(x)=\log_8(4-5x).$$

Область определения логарифмической функции — множество R_+. Поэтому заданная функция определена только для тех x, при которых $4-5x>0$, т. е. при $x<0,8$. Следовательно, областью определения заданной функции является интервал $(-\infty;\ 0,8)$.



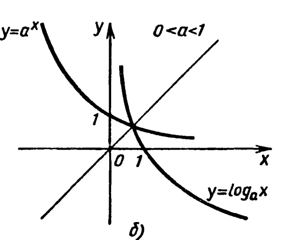


Рис 136

Пример 2. Найдем область определения функции

$$f(x)=\log_2(x^2-3x-4).$$

Как и в предыдущем примере, функция f определена для всех тех x, при которых $x^2-3x-4>0$. Решая это квадратичное неравенство, получаем, что $D(f)$ — объединение интервалов $(-\infty;\ -1)$ и $(4;\ \infty)$.

$-\quad +\quad -$

$-\frac{3}{2}\qquad \frac{5}{7}$

Рис. 137

Пример 3. Найдем область определения функции

$$f(x)=\log_7\frac{2x+3}{5-7x}.$$

Решая методом интервалов неравенство $\frac{2x+3}{5-7x}>0$, находим (рис. 137), что $D(f)=\left(-\frac{3}{2};\ \frac{5}{7}\right)$.

Пример 4. Сравним числа: а) $\log_3 5$ и $\log_3 7$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ и $\log_{\frac{1}{3}} 7$; в) $\log_3 10$ и $\log_4 12$.

а) Логарифмическая функция с основанием, большим 1, возрастает на всей числовой прямой. Так как $7>5$, то $\log_3 7>\log_3 5$.

б) В данном случае основание логарифма меньше 1, поэтому функция $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ убывает, и, следовательно, $\log_{\frac{1}{3}} 7<\log_{\frac{1}{3}} 5$.

в) Заметим, что $10>9=3^2$, и поэтому $\log_3 10>2$, с другой стороны, $12<16=4^2$, и, следовательно, $\log_4 12<2$. Итак, $\log_3 10>\log_4 12$.

Пример 5. Что больше: $\log_2 3+\log_2 7$ или $\log_2(3+7)$? По основному свойству логарифмов $\log_2 3+\log_2 7=\log_2 21$. А так как $\log_2(3+7)=\log_2 10$ и $10<21$, а основание логарифма 2 больше 1, то $\log_2 10<\log_2 21$, следовательно, $\log_2 3+\log_2 7>\log_2(3+7)$. ●

Упражнения

Найдите область определения выражения (499—500).

499. а) $\log_\pi(10-5x)$; б) $\log_5(9-x^2)$;
в) $\log_3(x-4)$; г) $\log_{0,3}(x^2-16)$.

500. а) $\log_{\sqrt{10}}(6+x-x^2)$; б) $\lg\frac{2x+5}{x-1}$;
в) $\log_{0,9}\frac{2+3x}{5-2x}$; г) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-2x-3)$.

Сравните числа (501—503).

501. а) $\log_2 3{,}8$ и $\log_2 4{,}7$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}15$ и $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}2$;

в) $\log_3 5{,}1$ и $\log_3 4{,}9$; г) $\log_{0,2} 1{,}8$ и $\log_{0,2} 2{,}1$.

502. а) $\log_{\sqrt{2}} 3$ и 1; б) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 1{,}9$ и $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2{,}5$;

в) $\log_\pi 2{,}9$ и 1; г) $\log_{0,7} \sqrt{2}$ и $\log_{0,7} 0{,}3$.

503. а) $\log_2 10$ и $\log_5 30$; б) $\log_{0,3} 2$ и $\log_5 3$;

в) $\log_3 5$ и $\log_7 4$; г) $\log_3 10$ и $\log_8 57$.

504. Перечислите основные свойства функции и постройте ее график:

а) $y=\log_3 x$; б) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$; в) $y=\log_4 x$; г) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$.

---

505. Найдите область определения выражения:

а) $\log_2 \sin x$; б) $\log_3 (2^x-1)$; в) $\log_{\frac{1}{2}} \cos x$; г) $\lg (1-3^x)$.

506. Найдите значение выражения:

а) $\log_2 2 \sin \frac{\pi}{15}+\log_2 \cos \frac{\pi}{15}$;

б) $\log_4 (\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3})+\log_4 (\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9})$;

в) $\lg \operatorname{tg} 4+\lg \operatorname{ctg} 4$;

г) $\log_\pi (5+2\sqrt{6})+\log_\pi (5-2\sqrt{6})$.

507. Постройте график функции:

а) $y=\log_3 (x-2)$; б) $y=-\log_{\frac{1}{2}} x$;

в) $y=\log_2 (x+1)$; г) $y=\log_{\frac{1}{3}} x+2$.

508. Решите уравнение:

а) $\log_3 x=2 \log_9 6-\log_9 12$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x=\log_{0,2} 35-2 \log_{0,2} 25\sqrt{7}$;

в) $\log_5 x=\frac{1}{2} \log_3 144+\log_3 0{,}75$;

г) $\log_\pi x=3 \log_{0,1} 4+2 \log_{0,1} 1\frac{1}{4}$.

509. Решите графически уравнение:

а) $\lg x=1-x$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x=x-4$;

в) $\log_{\frac{1}{5}} x=x-6$; г) $\log_2 x=3-x$.

510. Верно ли, что логарифмическая функция:

а) имеет экстремумы;

б) является нечетной;

в) является периодической;
г) является четной?

511. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на промежутке I:

а) $f(x)=\log_{\frac{1}{4}} x$, $I=[1;\ 4]$; б) $f(x)=\log_9 x$, $I=\left[\frac{1}{9},\ 9\right]$,

в) $f(x)=\log_5 x$, $I=\left[\frac{1}{5};\ 1\right]$; г) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$, $I=\left[\frac{1}{2},\ 4\right]$

39. Решение логарифмических уравнений и неравенств

Рассмотрим простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a x=b.$$

Логарифмическая функция возрастает (или убывает) на промежутке $(0;\ \infty)$ и принимает на этом промежутке все действительные значения (рис. 135). По теореме о корне (п. 8) отсюда следует, что для любого b данное уравнение имеет и притом только одно решение. Из определения логарифма числа сразу следует, что a^b является таким решением.

○ Пример 1. Решим уравнение $\log_2(x^2+4x+3)=3$.

Данному уравнению удовлетворяют те значения x, для которых выполнено равенство $x^2+4x+3=2^3$. Мы получили квадратное уравнение $x^2+4x-5=0$, корни которого равны 1 и -5. Следовательно, числа 1 и -5 — решения данного уравнения.

Пример 2. Решим уравнение $\log_5(2x+3)=\log_5(x+1)$.

Это уравнение определено для тех значений x, при которых выполнены неравенства $2x+3>0$ и $x+1>0$. Для этих x данное уравнение равносильно уравнению $2x+3=x+1$, из которого находим $x=-2$. Число $x=-2$ не удовлетворяет, однако, неравенству $x+1>0$. Следовательно, данное уравнение корней не имеет.

Это же уравнение можно решить иначе. Переходя к следствию данного уравнения $2x+3=x+1$, находим, что $x=-2$. Как всегда, при неравносильных преобразованиях уравнений найденное значение необходимо проверить подстановкой в исходное уравнение. В данном случае получаем, что равенство $\log_5(-1)=\log_5(-1)$ неверно (оно не имеет смысла).

Пример 3. Решим уравнение $\log_x(x^2-2x+2)=1$.

Этому уравнению удовлетворяют такие числа x, для которых выполнены условия: $x>0$ и $x\neq 1$ (x — основание логарифмической функции) и равенство $x^2-2x+2=x$, т. е. $x^2-3x+2=0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни 1 и 2. Но $x=1$ не может быть решением данного уравнения. Следовательно, решением данного уравнения является только число 2.

Пример 4. Решим неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(5-2x)>-2$.

Число -2 равно $\log_{\frac{1}{3}} 9$. Поэтому данное неравенство можно переписать в виде $\log_{\frac{1}{3}}(5-2x)>\log_{\frac{1}{3}} 9$.

Логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{3}$ определена и убывает на R_+, так как $\frac{1}{3}<1$. Следовательно, второму неравенству удовлетворяют такие числа x, для которых выполнено условие $0<5-2x<9$, откуда $-2<x<2{,}5$.

Итак, множество решений данного неравенства есть интервал $(-2;\ 2{,}5)$.

Пример 5. Решим уравнение $\log_5^2 x-\log_{\sqrt{5}} x-3=0$.

Перейдем во втором слагаемом к основанию 5 и сделаем замену переменной $t=\log_5 x$, тогда

$$\log_{\sqrt{5}} x=\frac{\log_5 x}{\log_5 \sqrt{5}}=\frac{t}{\frac{1}{2}}=2t.$$

Теперь данное уравнение перепишется в виде $t^2-2t-3=0$. Корни этого квадратного уравнения 3 и -1. Решая уравнения замены $\log_5 x=3$ и $\log_5 x=-1$, находим $x=5^3=125$ и $x=5^{-1}=0{,}2$.

Пример 6. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(y-x)=\lg 2, \\ \log_2 x-4=\log_2 3-\log_2 y. \end{cases}$$

Первое уравнение системы равносильно уравнению $y-x=2$, а второе — уравнению $\frac{x}{16}=\frac{3}{y}$, причем $x>0$ и $y>0$. Подставляя $y=x+2$ в уравнение $\frac{x}{16}=\frac{3}{y}$, получим $x(x+2)=48$, откуда $x^2+2x-48=0$, т. е. $x=-8$ или $x=6$. Но так как $x>0$, то $x=6$ и тогда $y=8$. Итак, данная система уравнений имеет одно решение: $x=6$, $y=8$.

Заметим еще, что с помощью логарифмов можно записать корень любого показательного уравнения вида $a^x=b$, где $b>0$ (чего мы не могли еще сделать, решая примеры в п. 36). Этим корнем является число $x=\log_a b$.

Пример 7. Решим уравнение $5^{1-3x}=7$.

По определению логарифма $1-3x=\log_5 7$ и $x=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\log_5 7$. ●

Упражнения

Решите уравнения (512—515).

512. а) $9^x=0{,}7$; б) $(0{,}3)^x=7$; в) $2^x=10$; г) $10^x=\pi$.

513. а) $\log_5 x=2$; б) $\log_{0,4} x=-1$; в) $\log_9 x=-\frac{1}{2}$; г) $\lg x=2$.

514. а) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)=-2$; б) $\log_\pi(x^2+2x+3)=\log_\pi 6$;

в) $\log_{0,3}(5+2x)=1$; г) $\log_2(3-x)=0$.

515. а) $(0,2)^{4-x}=3$; б) $5^{x^2}=7$; в) $3^{2-3x}=8$; г) $7^{2x}=4$.

Решите неравенства (516—517).

516. а) $\log_3 x>2$; б) $\log_{0,5} x>-2$; в) $\log_{0,7} x<1$; г) $\log_{2,5} x<2$.

517. а) $\log_4(x-2)<2$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x)>-1$;

в) $\log_5(3x+1)>2$; г) $\log_{\frac{1}{7}}(4x+1)<-2$.

Решите уравнения (518—520).

518. а) $\log_a x=2\log_a 3+\log_a 5$; б) $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$;

в) $\log_a x=\log_a 10-\log_a 2$; г) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$.

519. а) $\frac{1}{2}\log_2(x-4)+\frac{1}{2}\log_2(2x-1)=\log_2 3$;

б) $\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1$;

в) $\lg(x^2+2x-7)-\lg(x-1)=0$;

г) $\log_5(x^2+8)-\log_5(x+1)=3\log_5 2$.

520. а) $\log_4^2 x+\log_4\sqrt{x}-1,5=0$; б) $\lg^2 x-\lg x^2+1=0$;

в) $\log_5^2 x-\log_5 x=2$; г) $\log_3^2 x-2\log_3 x-3=0$.

521. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=7, \\ \lg x+\lg y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_4(x+y)=2, \\ \log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=34, \\ \log_2 x+\log_2 y=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_4 x-\log_4 y=0, \\ x^2-5y^2+4=0. \end{cases}$

Решите уравнения (522—524).

522. а) $\frac{1}{\lg x+1}+\frac{6}{\lg x+5}=1$, б) $\log_2\frac{x}{4}=\frac{15}{\log_2\frac{x}{8}-1}$;

в) $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$; г) $\frac{1}{\lg x-6}+\frac{5}{\lg x+2}=1$.

523. а) $\log_a x=\log_{\sqrt{a}} 2+\log_{\frac{1}{a}} 3$; б) $\log_x 2-\log_4 x+\frac{7}{6}=0$;

в) $\log_3 x-2\log_{\frac{1}{3}} x=6$; г) $\log_{25} x+\log_5 x=\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{8}$.

524. а) $\log_2(9-2^x)=3-x$;

б) $\log_2(25^{x+3}-1)=2+\log_2(5^{x+3}+1)$;

в) $\log_4(2\cdot 4^{x-2}-1)=2x-4$;

г) $\log_2(4^x+4)=\log_2 2^x+\log_2(2^{x+1}-3)$.

Решите неравенства (525—528).

525. а) $\lg(2x-3)>\lg(x+1)$; б) $\log_{0,3}(2x-4)>\log_{0,3}(x+1)$;

в) $\lg(3x-7)\leqslant\lg(x+1)$; г) $\log_{0,5}(4x-7)<\log_{0,5}(x+2)$.

526. а) $\log_{0,5}x>\log_2(3-2x)$; б) $\log_\pi(x+1)+\log_\pi x<\log_\pi 2$;

в) $\lg x+\lg(x-1)<\lg 6$; г) $\log_2(x^2-x-12)<3$.

527. а) $\log_2^2 x-\log_2 x\leqslant 6$; б) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-4>0$;

в) $\lg^2 x+2\lg x>3$; г) $\log_3^2 x-9\leqslant 0$.

528. а) $\log_2\left(\sin\frac{x}{2}\right)<-1$; б) $|3-\log_2 x|<2$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}\cos 2x>1$; г) $|3\lg x-1|<2$.

Решите системы уравнений (529—530).

529. а) $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}(x+y)=2,\\ \log_3(x-y)=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=2,\\ \log_{48}x+\log_{48}y=1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}y=2,\\ \log_{\frac{1}{3}}x-\log_{\frac{1}{3}}y=4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=1+\lg 13,\\ \lg(x+y)=\lg(x-y)+\lg 8.\end{cases}$

530. а) $\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81,\\ \lg(x+y)^2-\lg x=2\lg 3;\end{cases}$

б) $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=50,\\ \lg(x+y)+\lg(x-y)=2-\lg 5;\end{cases}$

в) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576,\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\lg x-\lg y=\lg 15-1,\\ 10^{\lg(3x+2y)}=39.\end{cases}$

40. ▽ Понятие об обратной функции

1. Обратимость функций. В ходе исследования различных функций вы неоднократно решали такую задачу: вычислить значение функции f по данному значению x_0 аргумента. Часто приходится рассматривать и обратную задачу: найти значения аргумента, при которых функция f принимает данное значение y_0.

○ Пример 1. Пусть $f(x)=kx+b$ $(k\neq 0)$. Чтобы найти значения аргумента x, при которых $f(x)=y_0$, надо решить уравнение $f(x)=y_0$, т. е. уравнение $kx+b=y_0$. Решая его, находим, что при любом y_0 оно имеет и притом только одно решение $x=\frac{y_0-b}{k}$.

П р и м е р 2. Для функции $f(x)=x^2$ уравнение $f(x)=y_0$ при $y_0>0$ имеет два решения: $x_1=\sqrt{y_0}$, $x_2=-\sqrt{y_0}$. (Если $y_0=0$, решение одно: $x_0=0$.) ●

Функцию, принимающую каждое свое значение в единственной точке области определения, называют *обратимой*. Таким образом, при $k\neq 0$ функция $f(x)=kx+b$ обратима, а функция $f(x)=x^2$ (определенная на всей числовой прямой) не является обратимой.

З а м е ч а н и е. Из определения обратимой функции сразу следует, что если f обратима, а число a принадлежит области значений $E(f)$, то уравнение $f(x)=a$ имеет решение и притом только одно.

2. Обратная функция. Пусть f — произвольная обратимая функция. Для любого числа y_0 из ее области значений $E(f)$ имеется в точности одно значение x_0, принадлежащее области определения $D(f)$, такое, что $f(x_0)=y_0$. Поставив в соответствие каждому y_0 это значение x_0, получим новую функцию g с областью определения $E(f)$ и областью значений $D(f)$. Например, для обратимой функции $f(x)=kx+b$ $(k\neq 0)$ значение новой функции g в произвольной точке y_0 задается формулой

$$g(y_0)=\frac{y_0-b}{k}.$$

Выбирая для аргумента функции g привычное обозначение x, находим, что

$$g(x)=\frac{x-b}{k}.$$

Если функция g в каждой точке x области значений обратимой функции f принимает такое значение y, что $f(y)=x$, то говорят, что функция g — *обратная функция к* f.

Как показано выше, функцией, обратной к функции $f(x)=kx+b$ $(k\neq 0)$, является функция $g(x)=\frac{x-b}{k}$. Рассмотрим еще один пример.

○ П р и м е р 3. Докажем, что функция $f(x)=x^3$ обратима, и выведем формулу, задающую функцию $y=g(x)$, обратную к f.

По определению обратной функции сначала надо доказать, что уравнение $f(y)=x$ при любом значении x имеет единственное решение y. В данном случае это уравнение $y^3=x$, которое имеет единственное решение $y=\sqrt[3]{x}$ при любом x (см. п. 8). Поэтому функция $f(x)=x^3$ обратима и обратной к ней является функция $g(x)=\sqrt[3]{x}$. Графики этих функций изображены на рисунке 138. ●

Если задан график обратимой функции f, то график функции g, обратной к f, нетрудно построить, пользуясь следующим утверждением:

Графики функции f и обратной к ней функции g симметричны относительно прямой $y=x$.

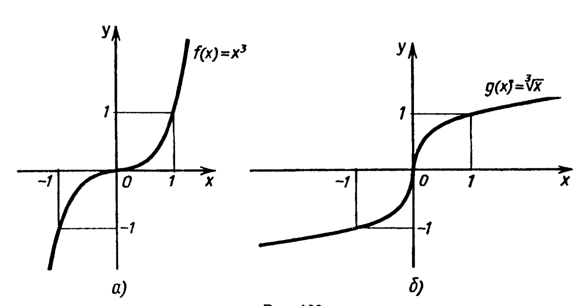


Рис. 138

Докажем это свойство. Заметим, что по графику функции f можно найти числовое значение обратной к f функции g в произвольной точке a. Для этого нужно взять точку с координатой a не на горизонтальной оси (как это обычно делается), а на вертикальной. Из определения обратной функции следует, что значение $g(a)$ равно b (рис. 139, *а*).

Таким образом, если считать, что выбрана несколько необычная система координат (аргумент откладывается на вертикальной оси, а значения функции — на горизонтальной), то можно сказать, что график обратной к f функции g — это график функции f (построенной в обычной системе координат). Для того чтобы изобразить график g в привычной системе координат, надо отразить график f относительно прямой $y=x$ (рис. 139, *б*).

Если функция g — обратная к функции f, то функция g обратима и обратной к ней является функция f. Поэтому говорят, что функции f и g *взаимно обратны*.

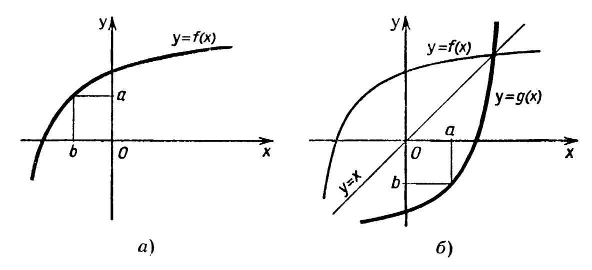


Рис. 139

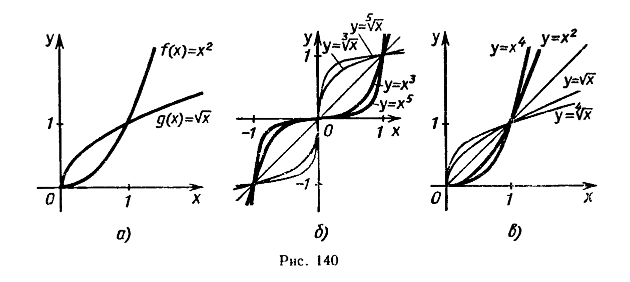


Рис. 140

Т е о р е м а *(об обратной функции).* ***Если функция f возрастает (или убывает) на промежутке I, то она обратима. Обратная к f функция g, определенная в области значений f, также является возрастающей (соответственно убывающей).***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим для определенности, что функция f возрастающая. Обратимость функции f — очевидное следствие теоремы о корне (п. 8). Поэтому остается доказать, что функция g, обратная к f, возрастает на множестве $E(f)$.

Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения из $E(f)$, такие, что $x_2 > x_1$, и пусть $y_1 = g(x_1)$, $y_2 = g(x_2)$. По определению обратной функции $x_1 = f(y_1)$ и $x_2 = f(y_2)$.

Воспользовавшись тем условием, что f — возрастающая функция, находим, что допущение $y_1 \geqslant y_2$ приводит к выводу $f(y_1) \geqslant f(y_2)$, т. е. $x_1 \geqslant x_2$. Это противоречит предположению $x_2 > x_1$. Поэтому $y_2 > y_1$, т. е. из условия $x_2 > x_1$ следует, что $g(x_2) > g(x_1)$.

Именно это и требовалось доказать.

○ П р и м е р 4. Как отмечалось выше, функция $f(x) = x^2$ не является обратимой. Однако функция f^*, определенная на промежутке $[0; \infty)$ формулой $f^*(x) = x^2$, возрастает на этом промежутке и, значит, имеет обратную. Обратной к функции f^* является функция $g(x) = \sqrt{x}$. Графики этих функций изображены на рисунке 140, *а*. ●

Вообще функция $f(x) = x^n$ при любом натуральном n возрастает на промежутке $[0; \infty)$ и поэтому имеет обратную. Обратной к функции $f(x) = x^n$ является функция $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Графики этих функций при некоторых значениях n изображены на рисунке 140, *б, в*.

Упражнения

Выведите формулу, задающую функцию g, обратную к данной функции f. Укажите область определения и область значений функции g (531—532).

531. а) $f(x)=2x+1$; б) $f(x)=\frac{1}{2}x-1$;

в) $f(x)=-2x+1$; г) $f(x)=-\frac{1}{2}x-1$.

532. а) $f(x)=-\frac{1}{x}$; б) $f(x)=2x^2\ (x\geqslant 0)$;

в) $f(x)=\frac{x}{x+2}$; г) $f(x)=\sqrt{x+1}$.

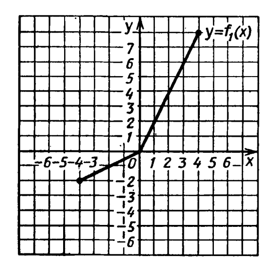
533. Постройте график функции, обратной к f:

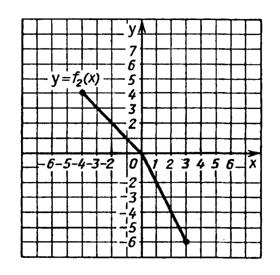
а) $f(x)=2x^3+1$; б) $f(x)=(x+1)^2,\ x\in(-\infty;\ -1]$;

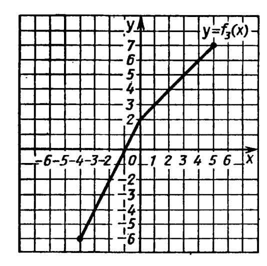
в) $f(x)=-2x^3+1$; г) $f(x)=(x-1)^2,\ x\in[1;\ \infty)$.

534. По графику функции f (рис. 141) найдите значения обратной к f функции g в точках -2, 1 и 3. Постройте график функции g, укажите ее область определения и область значений:

а) $f(x)=f_1(x)$; б) $f(x)=f_2(x)$; в) $f(x)=f_3(x)$; г) $f(x)=f_4(x)$.







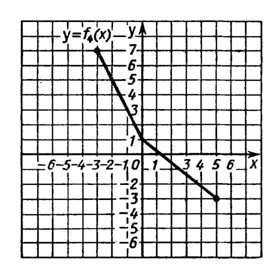


Рис. 141

Докажите, что функция f имеет обратную на указанном промежутке. Постройте график функции, обратной к f (535—536).

535. а) $f(x)=x^2+1$, $x\leqslant 0$; б) $f(x)=2x$, $(-\infty;\ \infty)$;
в) $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $x\geqslant 0$; г) $f(x)=x^3+1$, $(-\infty;\ \infty)$.

536. а) $f(x)=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; б) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;
в) $f(x)=\cos x$, $x\in[0;\ \pi]$; г) $f(x)=\operatorname{ctg} x$, $x\in(0;\ \pi)$.

§ 11. ПРОИЗВОДНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

41. Производная показательной функции

1. Число *e*. В предыдущих пунктах графики показательной функции изображались в виде гладких линий (без изломов), к которым в каждой точке можно провести касательную. Но существование касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 равносильно ее дифференцируемости в x_0. Поэтому естественно предположить, что показательная функция дифференцируема во всех точках области определения.

Нарисуем несколько графиков функции $y=a^x$ для a, равного 2; 2,3; 3; 3,4 (рис. 142), и проведем к ним касательные в точке с абсциссой 0. Углы наклона этих касательных к оси абсцисс приблизительно равны 35, 40, 48 и 51° соответственно, т. е. с возрастанием a угловой коэффициент касательной к графику функции $y=a^x$ в точке M (0; 1) постепенно увеличивается от tg 35° до tg 51°. Представляется очевидным, что, увеличивая a от 2 до 3, мы найдем такое значение a, при котором угловой коэффициент соответствующей касательной равен 1 (т. е. угол наклона равен 45°). Вот точная формулировка этого предложения (мы принимаем его без доказательства):

Существует такое число, большее 2 *и меньшее* 3 (это число обозначают буквой e), *что показательная функция* $y=e^x$ *в точке* 0 *имеет производную, равную* 1, *т. е.*

$$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\to 1 \text{ при } \Delta x\to 0. \qquad (1)$$

З а м е ч а н и е. Доказано, что число e иррационально и поэтому записывается в виде бесконечной десятичной непериодической дроби. С помощью электронных вычислительных машин найдено более двух тысяч десятичных знаков числа e. Первые знаки таковы: $e=2{,}718281828459045\ldots$.

Функцию e^x часто называют *экспонентой.*

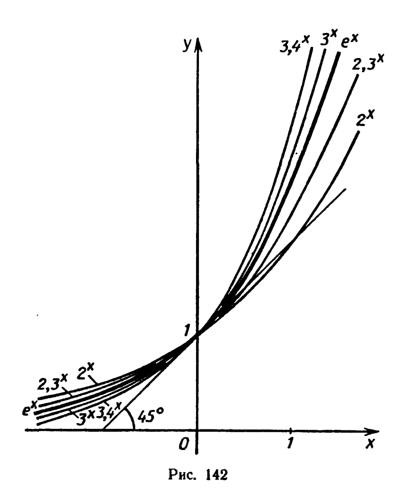


Рис. 142

2. Формула производной показательной функции.

Теорема 1. ***Функция e^x дифференцируема в каждой точке области определения, и***

$$(e^x)' = e^x.$$

Доказательство. Найдем сначала приращение функции $y = e^x$ в точке x_0:

$$\Delta y = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1).$$

Пользуясь условием (1), находим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to e^{x_0} \text{ при } \Delta x \to 0.$$

По определению производной отсюда следует, что $y' = e^x$, т. е. $(e^x)' = e^x$ при любом x.

○ Пример 1. Найдем производную функции $y = e^{5x}$:

$$(e^{5x})' = e^{5x} \cdot (5x)' = 5e^{5x}. \text{ ●}$$

Число e положительно и отлично от 1, поэтому определены логарифмы по основанию e.

Определение. ***Натуральным логарифмом*** (обозначается ln) **называется логарифм по основанию** e:

$$\ln x = \log_e x. \qquad (2)$$

По основному логарифмическому тождеству для любого положительного числа $e^{\ln a}=a$. Поэтому a^x может быть записано в виде

$$a^x=(e^{\ln a})^x=e^{x\ln a}. \qquad (3)$$

Выведем формулу производной показательной функции при произвольном значении a.

Теорема 2. ***Показательная функция a^x дифференцируема в каждой точке области определения, и***

$$(a^x)'=a^x \ln a. \qquad (4)$$

Доказательство. Из формулы (3) по теореме о производной сложной функции получаем, что показательная функция дифференцируема в каждой точке и

$$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}\ln a=a^x \ln a. \qquad (5)$$

Следствие. *Показательная функция непрерывна в каждой точке своей области определения, т. е. $a^x \to a^{x_0}$ при $x \to x_0$.*

Это вытекает из дифференцируемости показательной функции и леммы о непрерывности дифференцируемой функции (см. с. 111).

○ Пример 2. Найдем производные функций $y=2^x$ и $y=5^{-3x}$.

По формуле (4) имеем $(2^x)'=2^x \ln 2$; $(5^{-3x})'=(-3)\cdot 5^{-3x}\ln 5$.

Пример 3. Исследуем функцию $f(x)=xe^x$ на возрастание (убывание) и экстремум.

Найдем производную этой функции:

$$f'(x)=(xe^x)'=x'e^x+x(e^x)'=e^x+xe^x=e^x(1+x).$$

Так как $e^x>0$ для любого x, знак f' совпадает со знаком $(1+x)$. Следовательно, $f'(x)>0$ на промежутке $(-1;\ \infty)$, поэтому f возрастает на промежутке $[-1;\ \infty)$. На промежутке $(-\infty;\ -1)$ имеем $f'(x)<0$, поэтому f убывает на $(-\infty;\ -1]$. В точке $x_0=-1$ производная меняет знак с минуса на плюс, и, значит, $x_0=-1$ является точкой минимума.

График функции приведен на рисунке 143. ●

3. Первообразная показательной функции.

Теорема 3. ***Первообразной для функции a^x на R является функция $\frac{a^x}{\ln a}$.***

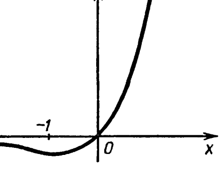


Рис. 143

Действительно, $\ln a$ — постоянная, и поэтому

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot(a^x)'=$$
$$=\frac{1}{\ln a}\cdot a^x \ln a=a^x$$

при любом x. Этим доказано,

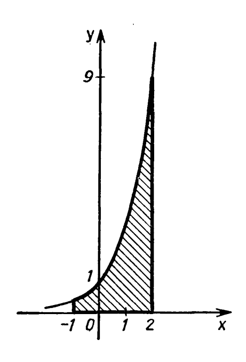


Рис. 144

что $\frac{a^x}{\ln a}$ есть первообразная для a^x на $\boldsymbol{R}$. А из равенства $(e^x)'=e^x$ для всех x следует, что e^x есть первообразная для e^x на $\boldsymbol{R}$.

○ Пример 4. Найдем первообразные для функций:

а) $f(x)=5^x$; б) $g(x)=4\cdot 2^x$;

в) $h(x)=4e^{3x}-10\cdot 0{,}6^x$.

Пользуясь теоремой 3 и правилами нахождения первообразных, выписываем ответы:

а) $F(x)=\frac{5^x}{\ln 5}+C$;

б) $G(x)=\frac{4\cdot 2^x}{\ln 2}+C$;

в) $H(x)=\frac{4}{3}e^{3x}-10\cdot\frac{0{,}6^x}{\ln 0{,}6}+C$.

Пример 5. Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3^x$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$.

Указанная фигура есть криволинейная трапеция (рис. 144). Поэтому ее площадь S находим по формуле площади криволинейной трапеции:

$$S=\int_{-1}^{2} 3^x dx=\frac{3^x}{\ln 3}\bigg|_{-1}^{2}=\frac{9}{\ln 3}-\frac{3^{-1}}{\ln 3}=\frac{26}{3\ln 3}. \ \bullet$$

Упражнения

537. Найдите по таблицам натуральных логарифмов (или с помощью калькулятора):

а) $\ln 3$, $\ln 5{,}6$, $\ln 1{,}7$; б) $\ln 8$; $\ln 17$; $\ln 1{,}3$;

в) $\ln 2$, $\ln 35$, $\ln 1{,}4$; г) $\ln 7$, $\ln 23$, $\ln 1{,}5$.

Найдите производную каждой из функций (538—539).

538. а) $y=4e^x+5$; б) $y=2x+3e^{-x}$;

в) $y=3-\frac{1}{2}e^x$; г) $y=5e^{-x}-x^2$.

539. а) $y=e^x\cos x$; б) $y=3e^x+2^x$;

в) $y=3^x-3x^2$; г) $y=x^2e^x$.

540. Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x)=e^{-x}$, $x_0=0$; б) $f(x)=3^x$, $x_0=1$;

в) $f(x)=e^x$, $x_0=0$; г) $f(x)=2^{-x}$, $x_0=1$.

541. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=5e^x$; б) $f(x)=2\cdot 3^x$; в) $f(x)=4^x$; г) $f(x)=\frac{1}{2}e^x+1$.

542. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_0^1 0{,}5^x dx$; б) $\int\limits_0^1 e^{2x} dx$; в) $\int\limits_{-2}^1 2^x dx$; г) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^2 3^x dx$.

Найдите производную каждой из функций (543—544).

543. а) $y=e^{x^2}\sin\frac{x}{2}$; б) $y=7^{\frac{x}{2}}\operatorname{tg} 3x$;

в) $y=e^{\sqrt{x}}\cos 2x$; г) $y=2^{-x}\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$.

544. а) $y=\frac{x^6}{4^x+5}$; б) $y=\frac{e^{-x}}{x^2+2}$;

в) $y=\frac{3^x}{2^x+5^x}$; г) $y=\frac{0{,}3^{-x}}{\sqrt{x}+0{,}5}$.

545. Исследуйте на возрастание (убывание) и экстремумы функцию:

а) $f(x)=xe^{5x}$; б) $f(x)=x^2 2^{-x}$; в) $f(x)=xe^{-x}$; г) $f(x)=x^4 0{,}5^x$.

546. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=e^{3-2x}$; б) $f(x)=2\cdot 0{,}9^x-5{,}6^{-x}$;

в) $f(x)=2^{-10x}$; г) $f(x)=e^{3x}+2{,}3^{1+x}$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями (547—548).

547. а) $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$; б) $y=3^x$, $y=9^x$, $x=1$;

в) $y=2^x$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$; г) $y=e^x$, $y=e^{2x}$, $x=1$.

548. а) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=3$, $x=1$; б) $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $y=e$;

в) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=1$, $x=-2$; г) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=4^x$, $y=4$.

42. Производная логарифмической функции

Покажем сначала, что логарифмическая функция дифференцируема в каждой точке. Графики функций $y=\log_a x$ и $y=a^x$ симметричны относительно прямой $y=x$. Так как показательная функция дифференцируема в любой точке, а ее производная не обращается в нуль, график показательной функции имеет негоризонтальную касательную в каждой точке. Поэтому и график логарифмической функции имеет невертикальную касательную в любой точке. А это равносильно дифференцируемости логарифмической функции на ее области определения.

Докажем теперь, что *производная логарифмической функции* для любого x из области определения находится по формуле

$$\ln' x = \frac{1}{x}. \qquad (1)$$

По основному логарифмическому тождеству $x = e^{\ln x}$ при всех положительных x, т. е. в этом равенстве справа и слева стоит одна и та же функция (определенная на R_+). Поэтому производные x и $e^{\ln x}$ равны, т. е.

$$x' = (e^{\ln x})'. \qquad (2)$$

Известно, что $x' = 1$. Производную правой части вычисляем по правилу нахождения производной сложной функции и теореме 1 (п. 41): $(e^{\ln x})' = e^{\ln x} \ln' x = x \ln' x$. Подставляя найденные производные в равенство (2), находим $1 = x \ln' x$, откуда $\ln' x = \frac{1}{x}$.

○ Пример 1. Найдем производные функций: а) $y = \ln(5+2x)$; б) $y = \log_3 x$; в) $y = \log_7 2x$.

а) $(\ln(5+2x))' = \frac{1}{5+2x} \cdot (5+2x)' = \frac{2}{5+2x}$;

б) $(\log_3 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)' = \frac{1}{x \ln 3}$;

в) $(\log_7 2x)' = \left(\frac{\ln 2x}{\ln 7}\right)' = \frac{2}{2x \ln 7} = \frac{1}{x \ln 7}$.

Пример 2. Исследуем функцию $f(x) = x^2 \ln x$ на возрастание, убывание, экстремум и построим ее график.

Функция определена при $x > 0$. Найдем ее производную:

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = 2x\left(\ln x + \frac{1}{2}\right).$$

$x > 0$, поэтому знак производной совпадает со знаком $\left(\ln x + \frac{1}{2}\right)$. Отсюда следует, что $f'(x) > 0$ на промежутке $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};\ \infty\right)$, и поэтому на промежутке $\left[\frac{1}{\sqrt{e}};\ \infty\right)$ функция возрастает; на промежутке $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ производная отрицательна, поэтому f убывает на промежутке $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$. В точке $\frac{1}{\sqrt{e}}$ производная меняет знак с минуса на плюс, значит, это точка минимума; $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$. График функции приведен на рисунке 145. ●

Формула (1) показывает, *что для функции* $\frac{1}{x}$ *на промежутке* $(0;\ \infty)$ *любая первообразная может быть записана в виде* $\ln x + C$.

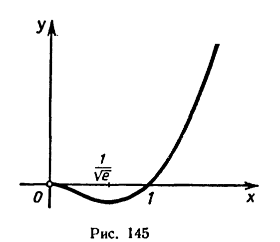


Рис. 145

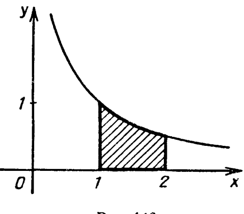


Рис. 146

Функция $\frac{1}{x}$ имеет первообразную и на промежутке $(-\infty;\ 0)$, это функция $\ln(-x)$. Действительно,

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

Так как $|x| = x$ при $x > 0$ и $|x| = -x$ при $x < 0$, мы доказали, что *на любом промежутке, не содержащем точку* 0, *первообразной для функции* $\frac{1}{x}$ *является функция* $\ln|x|$.

○ Пример 3. Для функции $\frac{1}{x+3}$ первообразные равны $\ln|x+3| + C$ (на любом промежутке, не содержащем точку -3).

Для функции $\frac{1}{5x+7}$ общий вид первообразных $\frac{1}{5}\ln|5x+7| + C$ (на любом промежутке, не содержащем точку $-\frac{7}{5}$).

Пример 4. Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ (рис. 146).

Поскольку $\ln x$ при $x > 0$ есть первообразная для $\frac{1}{x}$, площадь интересующей нас криволинейной трапеции равна $S = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$. ●

Упражнения

Найдите производную каждой из функций (549—550).

549. а) $y = \ln(2+3x)$; б) $y = \log_{0.3} x + \sin x$;
в) $y = \ln(1+5x)$; г) $y = \lg x - \cos x$.

550. а) $y = x^2 \log_2 x$; б) $y = \frac{\ln x}{x}$;
в) $y = x \ln x$; г) $y = \frac{x}{\ln x}$.

551. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=\frac{3}{7x+1}$; б) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+5}$;

в) $f(x)=\frac{1}{x+2}$, г) $f(x)=\frac{4}{x}$.

552. Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

а) $f(x)=\ln(x+1)$, $x_0=0$; б) $f(x)=\lg x+2$, $x_0=1$;

в) $f(x)=2\ln x$, $x_0=e$; г) $f(x)=\log_2(x-1)$, $x_0=2$.

553. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_1^7 \frac{2dx}{x}$; б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{3-2x}$; в) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x}$; г) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{3x+1}$.

---

554. Найдите производную функции:

а) $y=\frac{\ln(5+3x)}{x^2+1}$; б) $y=\frac{\sqrt{x}}{\lg(1-2x)}$;

в) $y=\frac{x^2}{\ln 5x}$; г) $y=\frac{\log_3 x^2}{x+1}$.

Исследуйте функции на возрастание (убывание) и экстремумы (555—556).

555. а) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$; б) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$;

в) $f(x)=2x-\ln x$; г) $f(x)=x\ln x$.

556. а) $f(x)=x\ln^2 x$; б) $f(x)=\frac{2x}{\lg x}$;

в) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; г) $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$.

557. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\frac{4}{x}+2$, $y=0$, $x=2$, $x=6$;

б) $y=-\frac{2}{x}$, $y=0$, $x=-4$, $x=-1$;

в) $y=\frac{1}{2x}$, $y=0$, $x=\frac{1}{4}$, $x=2$;

г) $y=3-\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=-6$, $x=-3$.

43. Степенная функция

1. Степенная функция и ее производная. Вы уже знаете, что для любого действительного числа α и каждого положительного x определено число x^α. Зафиксируем число α на промежутке $(0; \infty)$.

Определение. **Функция, заданная формулой $f(x)=x^{\alpha}$, называется *степенной* (с показателем степени α).**

Если $\alpha>0$, то степенная функция определена и при $x=0$, поскольку $0^{\alpha}=0$. При целых α формулой $f(x)=x^{\alpha}$ степенная функция f определена и для $x<0$. При четных α эта функция четная, а при нечетных α — нечетная. Поэтому исследование степенной функции достаточно провести только на промежутке $(0; \infty)$.

В предыдущих разделах курса были получены формулы для производной функции $y=x^{\alpha}$ лишь при целых показателях степени, а также $\alpha=\frac{1}{2}$. Теперь нам остается вывести формулу при произвольном α. Докажем, что для любого x из области определения производная степенной функции находится так:

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Действительно, так как $x=e^{\ln x}$, то $x^{\alpha}=e^{\alpha \ln x}$. Отсюда по правилу вычисления производной сложной функции получаем:

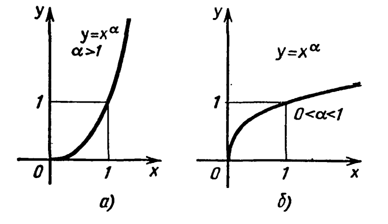
$$(x^{\alpha})'=(e^{\alpha \ln x})'=e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)'=x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Формула (1) доказана.

При $\alpha<0$ степенная функция убывает на промежутке $(0; \infty)$, поскольку $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}<0$ при $x>0$. При $\alpha>0$ имеем $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}>0$, поэтому степенная функция возрастает при $x>0$. Кроме того, надо учесть, что при $x=0$ степенная функция равна 0 и $x^{\alpha}\to 0$ при $x\to 0$ и $x>0$. Поэтому точка 0 присоединяется к промежутку возрастания, т. е. при $\alpha>0$ степенная функция возрастает на промежутке $[0; \infty)$. Примеры графиков степенной функции при различных α приведены на рисунке 147.

Из формулы (1) следует, что производной степенной функции $f(x)=x^{\alpha}$ является степенная функция ($f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$). Иначе обстоит дело с первообразной степенной функции.

При $\alpha\neq-1$ общий вид первообразных степенной функции $f(x)=x^{\alpha}$, как легко проверить, таков: $F(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.



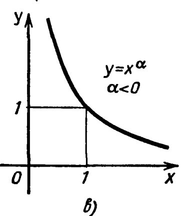


Рис. 147

При $\alpha = -1$, как известно, первообразной функции f является функция $F(x) = \ln|x| + C$.

2. Вычисление значений степенной функции. Выведем приближенную формулу

$$(1+\Delta x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\Delta x. \qquad (2)$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^{\alpha}$ и воспользуемся приближенной формулой

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x, \qquad (3)$$

известной из п. 20, при $x_0 = 1$ и $x = 1 + \Delta x$. Имеем $f(x_0) = f(1) = 1$ и $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, откуда $f'(x_0) = f'(1) = \alpha \cdot 1^{\alpha-1} = \alpha$. По формуле (3)

$$f(x) = (1+\Delta x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\Delta x.$$

Чаще всего эту формулу применяют для вычисления корней. Полагая $\alpha = \frac{1}{n}$, находим:

$$\sqrt[n]{1+\Delta x} = (1+\Delta x)^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{\Delta x}{n}. \qquad (4)$$

○ Пример. Вычислим приближенные значения: а) $\sqrt[4]{1{,}08}$; б) $\sqrt[3]{27{,}03}$; в) $\sqrt[10]{1000}$.

Воспользуемся формулой (4):

а) $\sqrt[4]{1{,}08} = (1+0{,}08)^{\frac{1}{4}} \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}08 = 1{,}02$;

б) $\sqrt[3]{27{,}03} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{0{,}03}{27}\right)} = 3 \cdot \sqrt[3]{1+\frac{0{,}03}{27}} \approx 3\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{0{,}03}{27}\right) \approx$ $\approx 3{,}0011$. (Значение $\sqrt[3]{27{,}03}$ с восемью знаками после запятой таково: $\sqrt[3]{27{,}03} \approx 3{,}0011107$.)

в) Заметим, что $2^{10} = 1024$. Имеем:

$$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10} - 24} = 2 \cdot \sqrt[10]{1 - \frac{24}{2^{10}}} \approx 2\left(1 - \frac{24}{10 \cdot 2^{10}}\right) \approx 1{,}995. \ ●$$

Упражнения

Постройте график функции f и найдите ее производную (558—559).

558. а) $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$; б) $f(x) = x^{\sqrt{3}}$;

в) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; г) $f(x) = x^{-\sqrt{5}}$.

559. а) $f(x) = x^{-e}$; б) $f(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^{-\lg 5}$;

в) $f(x) = x^{\pi}$; г) $f(x) = (2x)^{\ln 3}$

Вычислите с помощью формулы (4) приближенные значения (560—561).

560. а) $24^{\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt[4]{625\cdot 3}$; в) $\sqrt[3]{81}$; г) $\sqrt[4]{48}$.

561. а) $\sqrt[3]{30}$; б) $\sqrt[4]{90}$; в) $\sqrt{9{,}02}$; г) $\sqrt[5]{33}$.

562. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на промежутке I:

а) $f(x)=x^{\frac{2}{5}}$, $I=[1;\ 32]$; б) $f(x)=x^{-\frac{4}{3}}$, $I=\left[\frac{1}{8};\ 27\right]$;

в) $f(x)=x^{-4}$, $I=\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$; г) $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$, $I=\left[\frac{1}{16};\ 81\right]$.

563. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=-\frac{1}{2}x^{-\sqrt{2}}$; б) $f(x)=x^{2\sqrt{3}}$;

в) $f(x)=3x^{-1}$; г) $f(x)=x^{e}$.

564. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_1^4 x^{\frac{5}{2}}dx$; б) $\int\limits_1^8 \frac{4dx}{x^{\frac{2}{3}}}$, в) $\int\limits_e^{e^2} 2x^{-1}dx$; г) $\int\limits_{16}^{81} 5x^{\frac{1}{4}}dx$.

---

565. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^{\sqrt{2}}$, $y=0$, $x=1$; б) $y=x^{\sqrt{3}}$, $y=\frac{1}{x}$, $x=\frac{1}{2}$;

в) $y=x^{-0{,}8}$, $y=0$, $x=1$, $x=32$; г) $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=3$, $x=5$.

566. На миллиметровой бумаге постройте графики функций $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$ $(x\geqslant 0)$.

1) Найдите с помощью графика приближенные значения:

а) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{2{,}5}$; в) $\sqrt[3]{2{,}5}$, $\sqrt[4]{3}$; г) $\sqrt{2{,}5}$, $\sqrt[4]{2}$.

2) Найдите значения этих корней с помощью калькулятора.

3) Вычислите их приближенные значения, пользуясь формулой (4). У к а з а н и е: $2{,}5=1{,}6^2-0{,}06$; $2{,}5=1{,}3^3+0{,}303$; $2{,}5=1{,}25^4+\frac{15}{256}$; $2=1{,}4^2+0{,}04$; $3=1{,}4^3+0{,}256$, $3=$ $=1{,}3^4=0{,}1439$.

4) Сравните полученные результаты.

567. Верно ли, что функция $f(x)=x^{\sqrt{5}}$ обладает свойством:

а) в области определения можно найти отрезок, на концах которого функция принимает значения разных знаков;

б) является четной; в) имеет экстремумы;

г) существует точка x_0, в которой функция принимает наименьшее значение.

44. Понятие о дифференциальных уравнениях

1. Непосредственное интегрирование. В ходе решения задач естествознания часто возникают соотношения, связывающие производные некоторой функции (первую, вторую и т. д.), саму эту функцию и независимую переменную. Например, согласно второму закону Ньютона при движении по прямой материальной точки постоянной массы m справедлива формула $F=ma$, где F — сила, вызывающая движение, a — ускорение точки. Пусть сила F зависит только от времени t, т. е. $F=F(t)$. Вспоминая, что ускорение есть вторая производная координаты по времени $(a(t)=x''(t))$, получаем дифференциальное уравнение относительно функции $x(t)$:

$$F(t)=mx''(t), \text{ т. е. } x''(t)=\frac{F(t)}{m},$$

для решения которого сначала находим $x'(t)$ как первообразную функции $\frac{F(t)}{m}$, а затем и $x(t)$ как первообразную функции $v(t)=x'(t)$. Общее решение зависит от двух произвольных постоянных. Для того чтобы их найти, обычно задают координату и скорость в какой-либо момент времени t.

○ Пример 1. При вертикальном движении под действием силы тяжести координата $h(t)$ точки единичной массы удовлетворяет дифференциальному уравнению (ось Oz направлена вертикально вниз):

$$h''(t)=g.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$h(t)=h_0+v_0t+\frac{gt^2}{2}, \text{ где } h_0=h(0),\ v_0=v(0).$$

Задав h_0 и v_0, мы получим уже единственное решение. ●

Вообще первообразную F для функции f можно рассматривать как решение *простейшего дифференциального уравнения*

$$F'(x)=f(x), \qquad (1)$$

где $f(x)$ — данная функция, $F(x)$ — решение этого уравнения.

2. Дифференциальное уравнение показательного роста и показательного убывания. Решение многих задач физики, техники, биологии и социальных наук сводится к задаче нахождения функций, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$f'(x)=kf(x), \qquad (2)$$

где k — некоторая константа.

Зная формулу производной показательной функции, легко догадаться, что решением уравнения (2) является любая функция вида

$$f(x)=Ce^{kx}. \qquad (3)$$

где C — постоянная. Так как C произвольно, у дифференциального уравнения (2) бесконечно много решений.

Докажем, что других решений, кроме функций вида (3), уравнение (2) не имеет. Для этого рассмотрим произвольную функцию f, удовлетворяющую уравнению (2), и вспомогательную функцию

$$g(x)=f(x)e^{-kx}. \qquad (4)$$

Найдем ее производную:

$$g'(x)=f'(x)e^{-kx}+f(x)(e^{-kx})'=f'(x)e^{-kx}-kf(x)e^{-kx}.$$

Подставляя $kf(x)$ вместо $f'(x)$ из уравнения (2), получим:

$$g'(x)=kf(x)e^{-kx}-kf(x)e^{-kx}=0.$$

Из равенства производной функции g нулю следует, что $g(x)=C$ при всех x. Из (4) получаем:

$$f(x)e^{-kx}=C, \text{ откуда } f(x)=Ce^{kx},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. В приведенных выше рассуждениях мы предполагали, что функция f определена и удовлетворяет уравнению (2) на всей числовой прямой. В конкретных задачах часто приходится рассматривать функции, удовлетворяющие уравнению (2) только на некотором промежутке. Естественно, что в таком случае формула (3) будет давать общее решение задачи только на промежутке, на котором выполняется уравнение (2).

Смысл дифференциального уравнения (2) заключается в том, что скорость изменения функции в точке x пропорциональна значению самой функции в этой точке. Это уравнение часто встречается при решении практических задач.

○ Пример 2. (Радиоактивный распад.) Пусть в начальный момент времени масса радиоактивного вещества равна:

$$m(0)=m_0. \qquad (5)$$

Экспериментально установлено, что скорость уменьшения массы вещества $m(t)$ со временем t пропорциональна его количеству, т. е. $m'(t)=-km(t)$, где $k>0$. Как показано выше, $m(t)=Ce^{-kt}$. Константа C находится из условия (5). А именно при $t=0$

$$m_0=m(0)=Ce^{-k\cdot 0}, \text{ т. е. } C=m_0.$$

Окончательно получаем:

$$m(t)=m_0e^{-kt}. \bullet \qquad (6)$$

Рассмотренный пример типичен: чтобы выделить из бесконечного числа решений дифференциального уравнения одно, обычно требуется еще ввести начальные условия (в нашем случае это условие (5)).

Промежуток времени T, через который масса радиоактив-

ного вещества уменьшается в 2 раза, называют *периодом полураспада* этого вещества. Зная T, можно найти k. Так как

$$m(T)=\frac{1}{2}m_0, \text{ т. е. } m_0e^{-kT}=\frac{1}{2}m_0,$$

имеем $e^{-kT}=\frac{1}{2}$.

Следовательно, $e^{kT}=2$, $kT=\ln 2$, откуда $k=\frac{\ln 2}{T}$.

Например, для радия $T\approx 1550$ лет. Поэтому (если время измеряется в годах) $k=\frac{\ln 2}{1550}\approx 0{,}000447$. Через миллион лет от начальной массы радия m_0 останется только $m(10^6)\approx m_0e^{-447}\approx$ $\approx 0{,}6\cdot 10^{-194}m_0$.

3. Гармонические колебания. Производную от производной f' функции f называют *второй производной* функции f и обозначают f'' (читается: «Эф два штриха»). Например:

$$\begin{aligned} \sin' x=\cos x,\ \sin'' x=\cos' x=-\sin x,\\ \cos' x=-\sin x,\ \cos'' x=-\sin' x=-\cos x. \end{aligned} \qquad (7)$$

Вторая производная помогает более подробно исследовать поведение функции. Первая производная есть скорость изменения функции, а вторая производная есть скорость изменения этой скорости.

Анализируя формулы (7), можно заметить, что вторые производные синуса и косинуса отличаются от самих функций только знаком. Иначе говоря, обе эти функции удовлетворяют при всех значениях аргумента t уравнению

$$f''(t)=-f(t).$$

В физике, в частности в механике, большую роль играют функции f, которые удовлетворяют уравнению

$$f''(t)=-\omega^2 f(t), \qquad (8)$$

где ω — положительная постоянная.

Разберем задачу из механики, приводящую к уравнению такого вида. Пусть к шарику массой m прикреплена расположенная горизонтально пружина, другой конец которой закреплен (рис. 148), и пусть в состоянии равновесия координата x центра шарика равна нулю. При перемещении центра в точку с коорди-

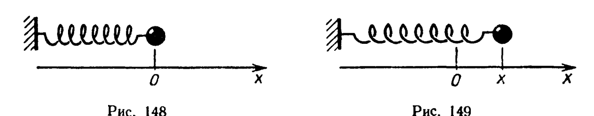


Рис. 148 Рис. 149

натой $x \neq 0$ возникает сила, стремящаяся вернуть шарик в положение равновесия. Согласно закону Гука эта сила пропорциональна перемещению x, т. е. $F = -kx$, где k — положительная константа (см. рис. 149). По второму закону Ньютона $F = ma$, поэтому, учитывая, что при движении по прямой ускорение есть вторая производная от координаты, имеем:

$$ma(t) = mx''(t) = F, \text{ т. е. } x''(t) = -\frac{k}{m} x(t).$$

Иначе говоря, движение центра шарика под действием сил упругости подчинено уравнению (8) при $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Покажем, что физическая величина, изменяющаяся во времени в соответствии с уравнением (8), совершает гармоническое колебание (см. п. 7). Само уравнение (8) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний.*

Проверим, что при любых постоянных A и φ функция

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \qquad (9)$$

есть решение уравнения (8). В самом деле, пользуясь формулой для производной сложной функции, получаем:

$$f'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi),$$
$$f''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 f(t).$$

Верно и обратное: любое решение уравнения (8) есть функция вида (9), причем обычно выбирают $A \geq 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. Доказательство этого выходит за рамки школьного курса.

Произвольные постоянные A и φ можно определить, если заданы начальные условия $f(0) = y_0$, $f'(0) = v_0$.

▽ **4. Падение тел в атмосферной среде.** Рассмотрим более сложный пример. При падении тел в атмосфере нужно учитывать сопротивление воздуха. Экспериментально установлено, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения, т. е. сила F, действующая на тело, равна $F(t) = mg - kh'(t)$, где m — масса тела, g — ускорение свободного падения, $h(t)$ — координата на прямой (ось Oh направлена вертикально вниз), k — коэффициент пропорциональности. По второму закону Ньютона $F = ma$, поэтому получаем уравнение

$$mz''(t) = mg - kz'(t), \text{ т. е. } z''(t) = g - \frac{k}{m} z'(t),$$

которое удобно рассматривать как дифференциальное уравнение

$$v'(t) = g - bv(t), \text{ где } b = \frac{k}{m} > 0, \qquad (10)$$

относительно скорости движения $v(t) = z'(t)$. Для того чтобы привести это уравнение к знакомому виду, введем новую неизвестную

функцию $y(t)=\frac{g}{b}-v(t)$, тогда $y'(t)=\left(\frac{g}{b}-v(t)\right)'=-v'(t)$ и уравнение (10) записывается в виде

$$-y'(t)=by(t), \text{ т. е. } y'(t)=-by(t),$$

решения которого уже известны: $y(t)=Ce^{-bt}$. Следовательно, $v(t)=\frac{g}{b}-y(t)=\frac{g}{b}-Ce^{-bt}$.

Функция $y=e^{-bt}$ убывает на R, при этом ее значения неограниченно уменьшаются при возрастании t (т. е. $Ce^{-bt}\to 0$ при $t\to\infty$ для любого C). Это означает, что скорость приближается к постоянному значению $\frac{g}{b}$, которое зависит от величины коэффициента пропорциональности k и массы m. Например, при затяжных прыжках (парашют не раскрыт!) эта скорость равна примерно 50 м/с, а скорость парашютиста при приземлении (когда k значительно больше) около 4—5 м/ч. ▲

Рассмотренные примеры позволяют понять, насколько мощным аппаратом исследования являются дифференциальные уравнения. Очень часто элементарные законы, управляющие каким-либо процессом, записываются в виде дифференциальных уравнений. Для того чтобы выяснить, как процесс развертывается во времени, приходится эти дифференциальные уравнения решать.

Упражнения

568. Проверьте, что функция $y(t)$ является решением данного дифференциального уравнения:

а) $y(t)=3\cos(2t+\pi)$, $y''=-4y$;

б) $y(t)=4\sin\left(\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{3}\right)$, $y''=-\frac{1}{4}y$;

в) $y(t)=2\cos 4t$, $y''+16y=0$;

г) $y(t)=\frac{1}{3}\sin(0{,}1t+1)$, $y''+0{,}01y=0$.

569. Докажите, что функция $y=5e^{3x}$ удовлетворяет уравнению $y'=3y$.

570. Докажите, что функция $y=7e^{-2x}$ удовлетворяет уравнению $y'=-2y$.

571. Докажите, что функция $y=3e^{-7x}$ удовлетворяет уравнению $y'=-7y$.

572. Найдите какое-нибудь отличное от нуля решение дифференциального уравнения:

а) $y''=-25y$; б) $\frac{1}{9}y''+4y=0$;

в) $4y''+16y=0$; г) $y''=-\frac{1}{4}y$.

573. Напишите дифференциальное уравнение гармонического колебания:

а) $x=2\cos(2t-1)$; б) $x=6{,}4\cos\left(0{,}1t+\frac{\pi}{7}\right)$;

в) $x=4\sin\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)$; г) $x=0{,}71\sin(0{,}3t-0{,}7)$.

---

574. Докажите, что сумма двух гармонических колебаний $x_1(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ и $x_2(t)=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$ будет периодической функцией тогда и только тогда, когда отношение частот есть рациональное число r, т. е. $\frac{\omega_1}{\omega_2}=r$.

575. От m миллиграммов радия C через t минут радиоактивного распада осталось n миллиграммов. Найдите период полураспада радия C.

576. К началу радиоактивного распада имели 1 г радия A. Через сколько минут его останется 0,125 г, если его период полураспада равен 3 мин?

577. Период полураспада радиоактивного вещества равен 1 ч. Через сколько часов его количество уменьшится в 10 раз? Вычислите, какая доля радия останется через 1000 лет, если период его полураспада равен 1550 лет.

578. Одно тело имеет температуру 200°, а другое 100°. Через 10 мин остывания этих тел на воздухе с температурой 0° первое тело остыло до температуры 100°, а второе — до 80°. Через сколько минут температуры тел сравняются? (Температура тела $T(t)$ удовлетворяет уравнению $T'(t)=-k(T-T_1)$, где T_1 — температура окружающей среды.)

579. Два тела имеют одинаковую температуру 100°. Они вынесены на воздух (его температура 0°). Через 10 мин температура одного тела стала 80°, а второго 64°. Через сколько минут после начала остывания разность их температур будет равна 25°?

580. Моторная лодка движется по озеру со скоростью 30 км/ч. Какова скорость лодки через 3 мин после выключения мотора? (Воспользуйтесь тем, что скорость лодки $v(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $v'(t)=-kv(t)$, где $k=\frac{5}{3}$, v — скорость в метрах в минуту.)

Сведения из истории

1. О происхождении терминов и обозначений. К умножению равных сомножителей приводит решение многих задач. Понятие о степени с натуральным показателем возникло уже в Древней Греции (выражение *квадрат числа* возникло при вычислении площади квадрата, а *куб числа* — при нахождении объема куба). Но современные обозначения (типа a^4, a^5) в XVII в. ввел Декарт.

Дробные показатели степени и наиболее простые правила действий над степенями с дробными показателями встречаются в XIV в. у французского математика Н. Орема (1323—1382). Известно, что Шюке (ок. 1445 — ок. 1500) рассматривал степени с отрицательными и нулевыми показателями. С. Стевин предложил подразумевать под $a^{\frac{1}{n}}$ корень $\sqrt[n]{a}$. Но систематически рациональные показатели первым стал употреблять Ньютон.

Немецкий математик М. Штифель (1487—1567) дал определение $a^0=1$ при $a\neq 1$ и ввел название *показатель* (это буквенный перевод с немецкого Exponent). Немецкое potenzieren означает *возведение в степень*. (Отсюда происходит и слово *потенцировать*, часто употребляемое при переходах типа $\log_a f(x)=$ $=\log_a g(x) \Rightarrow a^{\log_a f(x)}=a^{\log_a g(x)}$.) В свою очередь термин exponenten возник при не совсем точном переводе с греческого слова, которым Диофант обозначал квадрат неизвестной величины.

Термины *радикал* и *корень*, введенные в XII в., происходят от латинского radix, имеющего два значения: *сторона* и *корень*. Греческие математики вместо «извлечь корень» говорили: «найти сторону квадрата по его данной величине (площади)». Знак корня в виде символа $\surd$ появился впервые в 1525 г. Современный символ введен Декартом, добавившим горизонтальную черту. Ньютон уже указывал показатели корней: $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$.

Слово *логарифм* происходит от греческого λόγοφ (число) и αρίνμοφ (отношение) и переводится, следовательно, как *отношение чисел*. Выбор изобретателем (1594 г.) логарифмов Дж. Непером такого названия объясняется тем, что логарифмы возникли при сопоставлении двух чисел, одно из которых является членом арифметической прогрессии, а другое — геометрической (см. ниже). Логарифмы с основанием e ввел Спейдел (1619 г.), составивший первые таблицы для функции $\ln x$. Название более позднего происхождения *натуральный* (естественный) объясняется «естественностью» этого логарифма. Н. Меркатор (1620—1687), предложивший это название, обнаружил, что $\ln x$ — это площадь под гиперболой $y=\frac{1}{x}$. Он предлагал также название *гиперболический*.

2. Из истории логарифмов. В течение XVI в. резко возрос объем работы, связанный с проведением приближенных вычислений в ходе решения разных задач, и в первую очередь задач астрономии, имеющей непосредственное практическое применение (в частности, при определении положения судов по звездам и по Солнцу). Наибольшие проблемы возникали, как нетрудно понять, при выполнении операций умножения и деления. Попытки частичного упрощения этих операций путем сведения их к сложению (была составлена, например, таблица квадратов целых чисел от 1 до 100 000, позволяющая вычислять произведения по формуле $ab=\frac{1}{4}(a+b)^2-\frac{1}{4}(a-b)^2$) большого успеха не приноси-

Непер Джон

(1550—1617) —

английский математик. Изобретатель логарифмов, составитель первой таблицы логарифмов, облегчившей работу вычислителей многих поколений и оказавшей большое влияние на развитие приложений математики.



ли. Поэтому открытие логарифмов, сводящее умножение и деление чисел к сложению и вычитанию их логарифмов, удлинило, по выражению Лапласа, жизнь вычислителей.

Логарифмы необычайно быстро вошли в практику. Изобретатели логарифмов не ограничились разработкой новой теории. Было создано практическое средство — таблицы логарифмов,— резко повысившее производительность труда вычислителей. Добавим, что уже в 1623 г., т. е. всего через 9 лет после издания первых таблиц, английским математиком Д. Гантером была изобретена первая логарифмическая линейка, ставшая рабочим инструментом для многих поколений. (Вплоть до самого последнего времени, когда на наших глазах повсеместное распространение получает электронная вычислительная техника и роль логарифмов как средства вычислений резко снижается.)

Первые таблицы логарифмов составлены независимо друг от друга шотландским математиком Дж. Непером (1550—1617) и швейцарцем И. Бюрги (1552—1632). В таблицы Непера, изданные в книгах под названиями «Описание удивительной таблицы логарифмов» (1614 г.) и «Устройство удивительной таблицы логарифмов» (1619 г.), вошли значения логарифмов синусов, косинусов и тангенсов для углов от 0 до 90° с шагом в 1 минуту. Бюрги подготовил свои таблицы логарифмов чисел, по-видимому, к 1610 г., но вышли в свет они в 1620 г., уже после издания таблиц Непера, и поэтому остались незамеченными.

Одна из важных идей, лежащих в основе изобретения логарифмов, была уже известна. Штифель (1487—1567) и ряд других математиков обратили внимание на то, что умножению и делению членов геометрической прогрессии

$$\dots,\ a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ 1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \dots$$

соответствуют сложение и вычитание показателей, образующих арифметическую прогрессию

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Но одной этой идеи недостаточно. Например, «сеть» целых степеней числа 2 слишком редка; многие числа «остаются без логарифмов», поэтому необходима была еще одна идея: возводить в степень числа, очень близкие к единице. Заметив, что степени $\left(1+\frac{1}{10^n}\right)^n$ и $\left(1+\frac{1}{10^n}\right)^{n+1}$ при больших значениях n близки, Непер и Бюрги приняли аналогичное решение: Непер брал в качестве основания число $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$, а Бюрги — число $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)$.

Дальнейший ход их рассуждений и описание схем вычислений пересказать довольно трудно как потому, что имеется много непростых деталей, так и потому, что вообще тексты XVI в. довольно туманны. Заметим только, что фактически далее Непер переходит к основанию $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$, а Бюрги — к основанию $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$. Это не изменило существа дела (как вам известно, $\log_{a^{10^n}} x=\frac{1}{10^n}\log_a x$, и поэтому указанные переходы приводят лишь к переносу запятой в логарифме), но позволило несколько упростить вычисления и сами таблицы.

Таким образом, по существу оба изобретателя логарифмов пришли к выводу о целесообразности рассмотрения степеней вида $\left(1+\frac{1}{M}\right)^M$, где M очень большое число. Рассмотрение чисел такого вида приводит к известному вам числу e, которое определялось как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (определение предела последовательности дано в «Сведениях из истории» к главе III). Осталось уже немного до идеи принятия в качестве основания логарифмов числа e (основание таблицы логарифмов Бюрги совпадает с точностью до третьего знака с e, основание таблицы логарифмов Непера близко к числу $\frac{1}{e}$).

Первые таблицы десятичных логарифмов (1617 г.) были составлены по совету Непера английским математиком Г. Бриггсом (1561—1630). Многие из них были найдены с помощью выведенной Бриггсом приближенной формулы

$$\log_{10} a\approx\frac{n(\sqrt[n]{a}-1)}{m(\sqrt[m]{10}-1)},$$

достаточно точной при больших значениях m и n. Бриггс брал значения m и n в виде степеней двойки: это давало ему возмож-

ность свести вычисление $\sqrt[q]{a}$ и $\sqrt[m]{10}$ к последовательному извлечению квадратных корней.

Другая идея Бриггса позволяет находить значения десятичных логарифмов некоторых чисел самостоятельно, без помощи таблиц. Целая часть логарифма целого числа на единицу меньше количества цифр в самом числе. Поэтому, например, для нахождения $\lg 2$ с точностью до трех знаков достаточно найти число цифр 2^{10^3}. Это не очень трудно.

При составлении таблиц логарифмов важную роль сыграло найденное Непером и Бюрги соотношение между приращениями Δx и Δy в произвольной точке x_0 для функции $y=\log_a x$. Отвлекаясь от деталей их системы изложения, основной результат можно выразить так: $\frac{\Delta y}{\Delta x}\approx\frac{k}{x}$, где k — некоторая постоянная. Если основание логарифмов — степень $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, где n — достаточно большое число, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}\approx\frac{1}{x}$.

Устремляя Δx к нулю, приходим к дифференциальному уравнению $y'=\frac{1}{x}$, решением которого, как вы знаете, является функция $\ln x+C$. Существует система изложения, при которой $\ln x_0$ с самого начала определяется как $\int\limits_1^{x_0}\frac{dx}{x}$, т. е. $\ln x_0$ — площадь криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой, осью абсцисс и прямыми $x=1$ и $x=x_0$. Вывод известных вам свойств логарифмов, исходя из этого определения, не очень простая, но доступная вам задача.

Вопросы и задачи на повторение

1. 1) Дайте определение корня n-й степени из числа. Что такое арифметический корень n-й степени?

2) Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[7]{-128}$; г) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; д) $(\sqrt[n]{x})^n$.

3) Решите уравнение:

а) $x^3=125$; б) $x^4=64$; в) $x^5=-\frac{1}{243}$; г) $x^4=-16$.

2. 1) Перечислите основные свойства арифметических корней.
2) Преобразуйте выражение:

а) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[8]{4}$; б) $\frac{\sqrt[6]{125}}{\sqrt[3]{320}}$; в) $\left(\sqrt[6]{\frac{27}{8}}\right)^2$; г) $\sqrt{\frac{a^4b^2}{c^8}}$.

3) Какое из чисел больше:

а) $\sqrt[7]{128}$ или $\sqrt[5]{4}$; б) 2^{100} или 100^{20};

в) $\sqrt[8]{26}$ или $\sqrt[4]{5}$; г) $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt[3]{3}$?

3. 1) Дайте определение степени с рациональным показателем и перечислите основные свойства таких степеней.
2) Найдите значение:

а) $\left(\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt[5]{64}:2^{-\frac{1}{5}}\cdot\left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{6}$; в) $16^{-\frac{1}{4}}$; г) $\left(\frac{81}{625}\right)^{\frac{1}{4}}$.

3) Какое из чисел больше:

а) $\sqrt[3]{16}$ или $2^{\frac{5}{4}}$; б) $3^{-\frac{2}{3}}$ или $9^{-\frac{3}{4}}$;

в) $0{,}3^{\frac{4}{7}}$ или $0{,}3^{-\frac{4}{7}}$; г) $5^{-\frac{2}{3}}$ или $5^{-0{,}6}$?

4. 1) Перечислите основные свойства показательной функции.
2) Постройте график функции:

а) $y=4^x$; б) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$; в) $y=6^x$; г) $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x$.

3) Какое из чисел больше:

а) $2^{0{,}4}$ или $2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$; б) $1{,}2^{-\sqrt{3}}$ или $1{,}2^{\sqrt{5}}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; г) $0{,}3^{-\pi}$ или $0{,}3^{-3}$?

5. 1) а) Найдите корни уравнения $a^x=a^c$ ($a>0$, $a\neq 1$).
б) Решите неравенство $a^x>a^c$ (рассмотрите два случая: $0<a<1$ и $a>1$).
2) Решите уравнение:

а) $27^x=9^{\frac{1}{5}}$; б) $9^{x+1}+3^{x+2}=18$;

в) $0{,}5^{x^2+x-2{,}5}=\sqrt{2}$; г) $3^{x+2}-3^x=72$.

3) Решите неравенство:

а) $5^{x^2-1}>\frac{1}{5}$; б) $0{,}2^{x^2-2}>5$; в) $3^x<\frac{1}{9}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}>4$.

6. 1) Дайте определение логарифма числа.
2) Найдите:

а) $\log_2 16\sqrt{2}$; б) $\log_{0{,}2} 25$; в) $\lg 0{,}01$; г) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$.

3) Запишите основное логарифмическое тождество. С его помощью вычислите:

а) $3^{2+\log_3 5}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\log_2 3}$; в) $5^{-1+\log_5 2}$; г) $0{,}2^{1+\log_{0{,}2} 5}$.

7. 1) Перечислите основные свойства логарифмов.

2) Прологарифмируйте по основанию a выражение ($c>0$, $b>0$):

а) $16b^7\sqrt[5]{c}$ при $a=2$; б) $\frac{c^4}{\sqrt[3]{100b^n}}$ при $a=10$;

в) $\frac{27\sqrt{b}}{c^4}$ при $a=3$; г) $\frac{0{,}49b^3}{c^5\sqrt{c}}$ при $a=0{,}7$.

3) Найдите x, если:

а) $\log_3 x=2\log_3 7+\frac{2}{3}\log_3 27-\frac{3}{2}\log_3 16$;

б) $\log_2 x=2\log_2 5-\frac{1}{3}\log_2 8+\log_2 0{,}2$;

в) $\log_5 x=\log_5 1{,}5+\frac{1}{3}\log_5 8$;

г) $\lg x=1+2\lg 3-\frac{2}{3}\lg 125$.

8. 1) Дайте определение логарифмической функции и перечислите ее основные свойства.

2) Постройте график функции:

а) $y=\log_4 x$; б) $y=\log_{\frac{1}{5}}(x-1)$;

в) $y=\log_5 x$; г) $y=\log_{\frac{1}{4}}x+1$.

3) Какое число больше:

а) $\lg 7$ или $3\lg 2$; б) $\log_{\frac{1}{3}}5$ или $\log_{\frac{1}{3}}6$;

в) $\log_3 5$ или $\log_3 6$; г) $\log_2 3$ или $\log_3 2$?

9. 1) а) Укажите все корни уравнения $\log_a x=b$ ($a>0$, $a\neq 1$).
б) Решите неравенство $\log_a x>\log_a c$ (рассмотрите два случая: $0<a<1$, $a>1$).

2) Решите уравнение:

а) $\log_2(x-15)=4$; б) $\lg^2 x+2\lg x=8$;

в) $\ln^2(x-2)=4$; г) $\lg(x^2-2x-4)=\lg 11$.

3) Решите неравенство:

а) $\log_{0{,}6}x>2$; б) $\lg x\leqslant -2$; в) $\ln x\geqslant -3$; г) $\log_7 x<1$.

10. 1) Запишите формулу производной для функции $y=e^x$, $y=a^x$.

2) Найдите производную функции:

а) $v(x)=5-2e^{4-3x}$; б) $u(x)=3\cdot 5^{7x-1}$;

в) $g(x)=e^{-3x}$; г) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$.

3) Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $v(x)=e^{5x}-7e^{-4x}$; б) $u(x)=5e^{0,7x}$;

в) $g(x)=e^{-3x}$; г) $f(x)=e^{2x}$.

11. 1) Какую производную имеет функция $y=\log_a x$? Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{1}{x}$.

2) Найдите производную функции:

а) $y=x\ln 3x$; б) $y=\log_2(7-2x)$; в) $y=2\log_3 x$; г) $y=\ln\frac{x}{5}$.

3) Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=\frac{1}{5x}$; б) $g(x)=\frac{1}{x-3}$; в) $u(x)=\frac{5}{x}$; г) $h(x)=\frac{2}{x+1}$.

12. 1) Какую производную имеет степенная функция $y=x^{\alpha}$?

2) Постройте график функции и найдите ее производную:

а) $y=x^7$; б) $y=x^{-4}$; в) $y=x^{-0,3}$; г) $y=x^{\sqrt{2}}$.

3) Найдите приближенное значение:

а) $\sqrt[5]{32,02}$; б) $\sqrt[7]{127,9}$; в) $\sqrt[3]{64,3}$; г) $\sqrt[4]{80,6}$.

13. 1) Какие уравнения называют иррациональными?

2) Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-3}=2x-7$; б) $\sqrt[3]{2x+3}=2$;

в) $x-\sqrt{x}=12$; г) $x+3=\sqrt{33+x^2}$.

3) Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=3,\\ x-y=9;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=6,\\ xy=16;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\ x-y=8;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2+y=7,\\ x^2y=12.\end{cases}$

14. 1) Что называют решением системы двух уравнений с двумя переменными?

2) Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x-3y=5,\\ 2^{6y-x}=\frac{1}{4};\end{cases}$ б) $\begin{cases}5^{2x-y}=0,2,\\ 5^{y-x}=125;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2xy=9,\\ 4^{x-2y}=1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3^{3x+y}=\sqrt{3},\\ 5x-4y=15.\end{cases}$

3) Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x-y=4,\\ \log_2 x-\log_2 y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3^{x-2y}=1,\\ \lg x+\lg(y+5)=2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\log_3(5x-y)=2,\\ xy=2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2+y^2=26,\\ \log_5 x=1+\log_5 y.\end{cases}$

Глава V

ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ

§ 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Рациональные и иррациональные числа

1. Верно ли утверждение:

а) если натуральное число делится на 6, то оно делится на 3;

б) если сумма двух чисел — четное число, то каждое слагаемое четно;

в) если произведение двух чисел равно нулю, то каждый сомножитель равен нулю;

г) если куб некоторого числа делится на 8, то это число четно?

2. Докажите, что сумма трех последовательных натуральных чисел делится на 3, а их произведение — на 6.

3. К числу 523 допишите две цифры справа так, чтобы полученное пятизначное число делилось на: а) 3 и 5; б) 8 и 9.

4. Докажите, что число $10^{56}-1$ делится на 3 и 11.

5. В двузначном числе цифра единиц на 2 больше цифры десятков. Само число больше 30 и меньше 40. Найдите это число.

6. Докажите, что если дробь $\frac{a}{b}$ несократима, то несократима и дробь $\frac{ab}{a+b}$.

7. Докажите, что:

а) $|a|=|-a|$; б) $x\leqslant|x|$; в) $|x|^2=x^2$.

Найдите значения выражений (8—9).

8. а) $\dfrac{2{,}75:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot\left(-3\frac{1}{3}\right)}$; б) $\dfrac{3\frac{1}{3}:10+0{,}175:\frac{7}{20}}{1\frac{3}{4}-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}$;

в) $\left(1{,}4-3{,}5:1\frac{1}{4}\right):2{,}4+3{,}4:2\frac{1}{8}$; г) $\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0{,}25}}{6-\frac{46}{1+2{,}2\cdot10}}$.

9. а) $\dfrac{0{,}5^2-0{,}5}{0{,}4^2+0{,}1^2+2\cdot0{,}4\cdot0{,}1}$; б) $\dfrac{1{,}2^2-1{,}8^2}{1{,}2\cdot0{,}2-1{,}2\cdot0{,}8}$;

в) $\dfrac{0{,}6^2+0{,}1^2-2\cdot0{,}6\cdot0{,}1}{1{,}5-1{,}5^2}$; г) $\left(1\frac{3}{5}\right)^2-\left(4\frac{5}{8}-2{,}4\right):\frac{5}{8}$.

10. Укажите верные цифры в записи приближенного значения числа:

а) $3{,}82 \pm 0{,}1$; б) $1{,}980 \cdot 10^4 \pm 0{,}001 \cdot 10^4$;
в) $7{,}891 \pm 0{,}1$; г) $2{,}8 \cdot 10^{-4} \pm 0{,}3 \cdot 10^{-4}$.

11. Пользуясь формулой $(1+x)^n \approx 1+nx$, вычислите приближенно:

а) $1{,}002^5$; б) $0{,}997^4$; в) $2{,}004^3$; г) $3{,}01^5$.

12. Известно, что $a \approx 11{,}5$, $b \approx 3{,}8$. Найдите приближенное значение выражения: а) $a+b$; б) $3a-b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$.

13. Запишите в виде обыкновенной дроби:

а) 2,(3), б) 0,(66), в) 1,0(8); г) 1,(33).

14. Докажите, что не является рациональным каждое из чисел:

а) $\sqrt{5}$; б) $2\sqrt{7}$; в) $\sqrt{5}+1$; г) $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

15. Верно ли, что сумма (произведение) чисел a и b является рациональным (иррациональным) числом, если:

а) a и b — рациональные числа;
б) a и b — иррациональные числа;
в) a — рациональное, а b — иррациональное число?

16. Найдите с точностью до 0,01:

а) $\sqrt{2}+\frac{5}{9}$; б) $\sqrt{5}-\frac{2}{7}$; в) $\sqrt{3}+\frac{5}{6}$; г) $\sqrt{6}-\frac{1}{11}$.

17. Расположите числа в порядке возрастания. Укажите, какие из них являются рациональными, а какие — иррациональными числами:

а) $\sqrt{3}$; -2; $-1{,}7$; $\frac{\pi}{3}$; б) $\log_2 3$; -1; $\frac{5}{6}$; $-\sqrt{5}$;

в) $0{,}(2)$; $\frac{7}{6}$; $-\frac{\sqrt{5}}{2}$; г) e; $-1{,}(6)$; $\sqrt{10}$; $\lg 100$.

Сравните числа (18—19).

18. а) $\frac{4}{\lg\frac{1}{2}}$ и $\frac{7}{\lg\frac{1}{2}}$; б) $(\sqrt{5}+2)$ и $\sqrt{17}$;

в) $\log_3 7$ и $\log_7 3$; г) $(\sqrt{7}+3)$ и $\sqrt{31}$.

19. а) $15^{\log_3 10}$ и $10^{\log_3 15}$; б) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ и $(\sqrt{30}-\sqrt{3})$;

в) $\sin 2{,}1$ и $\sin 7{,}98$; г) $(\sqrt{8}+\sqrt{5})$ и $(\sqrt{3}+\sqrt{10})$.

20. Докажите рациональность числа:

а) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$; б) $(\sqrt{2}+1)^2+(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)$;

в) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\sqrt{35}$; г) $(3\sqrt{18}+2\sqrt{8}+4\sqrt{50}):\sqrt{2}$.

2. Проценты. Пропорции

21. Найдите число x, если: а) x составляет 2,5% от 320; б) 2,5% числа x равны 75; в) x равен числу процентов, которое составляет 2,8 от 84; г) x составляет 140% от 35.

22. За 1987 г. выпуск предприятием продукции возрос на 4%, а за следующий год — на 8%. Найдите средний ежегодный прирост продукции за двухлетний период.

23. Из данных четырех чисел первые три пропорциональны числам 5, 3, 20, а четвертое число составляет 15% третьего. Найдите эти числа, если второе число на 375 меньше суммы остальных.

24. За осенне-зимний период цена на овощи возросла на 25%. На сколько процентов следует снизить цену весной, чтобы летом овощи имели прежнюю цену?

25. Найдите неизвестный член пропорции:

а) $12:\frac{1}{8}=x:\frac{5}{36}$; б) $x:(-0,3)=0,15:1,5$;

в) $\frac{0,13}{x}=\frac{26}{3\frac{1}{3}}$; г) $\frac{x}{2,5}=\frac{-6,2}{15}$.

26. Решите уравнение:

а) $\frac{x-2}{2,5}=\frac{6}{x}$; б) $\frac{x}{x+5}=\frac{4,8}{1,2}$;

в) $\frac{x-3}{x-2}=\frac{6,5}{1,5}$; г) $\frac{4-x}{1,2}=\frac{5}{x+3}$.

27. Через точку E стороны AB треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне AC. Найдите:

а) отрезки, на которые прямая делит сторону BC, если $AB=22,5$ см, $AE=18$ см, $BC=15$ см;

б) площади фигур, на которые делится треугольник ABC, если $AB=7,5$ см, $AE=5$ см, а площадь треугольника ABC равна 72 см^2.

3. Прогрессии

28. Найдите сумму 20 членов арифметической прогрессии, если первый ее член равен 2, а седьмой равен 20.

29. Между числами 4 и 40 найдите такие четыре числа, чтобы вместе с данными они образовали арифметическую прогрессию.

30. Докажите, что числа $\frac{1}{\log_3 2}$, $\frac{1}{\log_6 2}$, $\frac{1}{\log_{12} 2}$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

31. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 26, а произведение второго и четвертого ее членов равно 160. Найдите сумму шести первых членов прогрессии.

32. Упростите выражение $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-d)^2$, если известно, что числа a, b, c, d, взятые в указанном порядке, составляют геометрическую прогрессию.

33. Докажите, что числа $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{2}$ образуют геометрическую прогрессию.

34. Четвертый член геометрической прогрессии больше второго на 24, а сумма второго и третьего равна 6. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

35. Найдите число членов конечной геометрической прогрессии, у которой первый, второй и последний члены соответственно равны 3, 12 и 3072.

36. Знаменатель конечной геометрической прогрессии равен $\frac{1}{3}$, четвертый ее член равен $\frac{1}{54}$, а сумма всех членов $\frac{121}{162}$. Сколько членов в этой прогрессии?

37. Найдите четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую, если сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних 12.

38. Найдите знаменатель и сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой $b_1=\sqrt{3}$, $b_2=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

39. Сумма первых трех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 10,5, а сумма прогрессии равна 12. Найдите ее первый член и знаменатель.

40. Три числа, каждое из которых является степенью с основанием a ($a>0$, $a\neq 1$), составляют геометрическую прогрессию. Докажите, что логарифмы этих чисел составляют арифметическую прогрессию.

§ 2. Тождественные преобразования

4. Преобразования алгебраических выражений

41. Разложите на множители:

а) $a^2+b^2+2a-2b-2ab$; б) $x^3+(y-1)x+y$;

в) a^6-8; г) $x^4-x^2(y^2+1)+y^2$.

42. Докажите, что:

а) $n^4+2n^3-n^2-2n$ делится на 24, если $n\in N$;
б) $(n^2+4n+3)(n^2+6n+8)$ делится на 24, если $n\in N$;
в) n^3-n делится на 6, если $n\in N$;
г) n^3-4n делится на 48, если $n\in N$, n — четное.

43. Сократите дробь:

а) $\frac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$; б) $\frac{x^2+x-12}{x^2+8x+16}$;

в) $\frac{2a^2-5a+2}{ab-2b-3a+6}$; г) $\frac{x^3-27}{x^2y+3xy+9y}$.

Упростите выражения (44, 45).

44. а) $\left(m+n-\frac{4mn}{m+n}\right):\left(\frac{m}{m+n}-\frac{n}{n-m}-\frac{2mn}{m^2-n^2}\right)$;

б) $\frac{a^3+b^3}{a+b}:(a^2-b^2)+\frac{2b}{a+b}-\frac{ab}{a^2-b^2}$;

в) $\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{8}{x^2+2x}\right)\cdot\frac{x^2-2x}{4-x}+\frac{x+8}{x+2}$;

г) $\left(\frac{1}{c^2+3c+2}+\frac{2c}{c^2+4c+3}+\frac{1}{c^2+5c+6}\right)^2\cdot\frac{(c-3)^2+12c}{2}$.

45. а) $\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{4y^2}{4x^2-y^2}$;

б) $\left(\frac{3}{a-3}+\frac{4}{a^2-5a+6}+\frac{2a}{a-2}\right):\left(\frac{3}{2a+1}\right)^{-1}-\frac{a-12}{3(3-a)}$;

в) $\left(\frac{x^3-8}{x-2}+2x\right)\cdot(4-x^2)^{-1}-\frac{x-1}{2-x}$;

г) $\frac{k^2}{3+k}\cdot\frac{9-k^2}{k^2-3k}+\frac{27+k^3}{3-k}:\left(3+\frac{k^2}{3-k}\right)$.

5. Преобразование выражений, содержащих радикалы и степени с дробными показателями

46. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; в) $\frac{2}{\sqrt{15}}$; г) $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$.

47. Вычислите:

а) $\sqrt{(\sqrt{5}-2{,}5)^2}-\sqrt[3]{(1{,}5-\sqrt{5})^3}-1$; б) $\frac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$;

в) $\left(\sqrt{(\sqrt{2}-1{,}5)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2+0{,}75$;

г) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{20}}{2\sqrt{5}+\sqrt{24}}\cdot(11+2\sqrt{30})$.

Упростите выражения (48—51).

48. а) $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$;

б) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

в) $\frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$;

г) $\left(\frac{\sqrt{c}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{c}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}-\frac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1}\right)$.

49. а) $\left(\sqrt{k}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+1}{\sqrt[4]{k}+1}\right)^{-1}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1}$;

б) $\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{b})^2}{a-b}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

в) $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})\right)\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}+1\right)$;

г) $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^2}-\sqrt{a^2b}-\sqrt{b^3}}{\sqrt[4]{b^5}+\sqrt[4]{a^4b}-\sqrt[4]{ab^4}-\sqrt[4]{a^5}}$.

50. а) $\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}$;

б) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\frac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right):\frac{(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$;

в) $\left(\frac{2x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{3x}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}-\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)$;

г) $\left(\frac{1-c^{-2}}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2c^{\frac{1}{2}}}{c^2}+\frac{c^{-2}-c}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1+\frac{2}{c^2}\right)^{-2}$.

51. а) $\frac{a^{\frac{7}{3}}-2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-ab^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b}\cdot a^{-\frac{1}{3}}$;

б) $\left(\frac{2(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})}{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}}-x-y\right):\frac{y-x}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$;

в) $\frac{c-1}{c^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}+1}\cdot c^{\frac{1}{4}}+1$;

г) $\frac{3(ab)^{\frac{1}{2}}-3b}{a-b}+\frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^3+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}$.

6. Преобразования тригонометрических выражений

Упростите выражения (52, 53).

52. а) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$;

б) $\sqrt{\sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg} \beta) + \cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg} \beta)}$;

в) $(3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha)^2 + (2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha)^2$;

г) $\frac{\cos \beta \operatorname{tg} \beta}{\sin^2 \beta} - \operatorname{ctg} \beta \cos \beta$.

53. а) $2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} (\alpha - \pi) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

б) $\frac{\sin(-\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$;

в) $\frac{\operatorname{tg}(\pi - \beta) \cos(\pi - \beta) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$;

г) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{16\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{18}}{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \cos \frac{5\pi}{18} \sin \frac{11\pi}{9} \cos 2\pi}$.

Докажите тождество (54, 55).

54. а) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg} \beta$;

б) $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$;

в) $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{ctg} \alpha$;

г) $\frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha} = -\operatorname{ctg} 2\alpha$.

55. а) $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha}} = \cos \frac{\alpha}{4}$ при $\pi < \alpha < 2\pi$;

б) $\sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha}} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

в) $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha}} = -\cos \frac{\alpha}{2}$ при $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

г) $\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \alpha}} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)$ при $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

56. Докажите справедливость равенства:

а) $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$;

б) $\operatorname{tg} 20° - 4 \sin 20° \sin 50° = -2 \sin 20°$;

в) $\frac{1}{\sin 10°} - 4 \sin 70° = 2$.

г) $\cos 20° + 2 \sin^2 55° - \sqrt{2} \sin 65° = 1$.

57. Докажите справедливость неравенства:

а) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

б) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\alpha}{4}\right)} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \leqslant 2\sqrt{3}$;

в) $(1 + \sin \varphi + \cos \varphi)(1 - \sin \varphi + \cos \varphi)(1 + \sin \varphi - - \cos \varphi)(\sin \varphi + \cos \varphi - 1) \leqslant 1$;

г) $2 \sin 4\alpha \sin 2\alpha + \cos 6\alpha \geqslant -1$.

Вычислите (58, 59).

58. а) $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$, если $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$;

б) $\frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \alpha}$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = m$;

в) $\cos \alpha$, если $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$;

г) $\sin \alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{2}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

59. а) $\lg \operatorname{tg} 1° + \lg \operatorname{tg} 2° + \ldots + \lg \operatorname{tg} 89°$;

б) $\lg \operatorname{tg} 1° \cdot \lg \operatorname{tg} 2° \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 89°$.

60. Сравните число с нулем:

а) $\lg \sin 32° \cdot \lg \cos 7° \cdot \lg \operatorname{tg} 40° \cdot \lg \operatorname{ctg} 20°$;

б) $\lg \operatorname{tg} 2° + \lg \operatorname{tg} 4° + \lg \operatorname{ctg} 2° + \lg \operatorname{ctg} 4°$.

61. Найдите сумму $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2}$, если

$\cos x = \frac{a}{b+c}$, $\cos y = \frac{b}{c+a}$, $\cos z = \frac{c}{a+b}$, $a + b + c \neq 0$.

7. Преобразования выражений, содержащих степени и логарифмы

Сравните числа (62, 63).

62. а) 3^{400} и 4^{300}; б) $-\log_5 \frac{1}{5}$ и $7^{\log_3 1}$;

в) 5^{200} и 2^{500}; г) $\log_4 \sqrt{2}$ и $\log_3 \frac{1}{81}$.

63. а) $\log_3 2+\log_3 7$ и $\log_3(2+7)$;
б) $\log_4 5-\log_4 3$ и $\log_4(5-3)$;
в) $3\log_7 2$ и $\log_7(3-2)$;
г) $\log_3 1{,}5+\log_3 2$ и $\log_3 1{,}5^2$.

64. Упростите выражение:

а) $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125} 8}$; б) $2^{4\log_4 a}-5^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}} a}-a^0$.

65. Запишите число в виде десятичной дроби:

а) $49^{1-\log_7 2}+5$; б) $36^{\frac{1}{2}-\log_6 5}+2^{-\log_2 10}$.

66. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3}$;
б) $2\log_{0,3} 3-2\log_{0,3} 10$;
в) $\dfrac{3\lg 2+3\lg 5}{\lg 13-\lg 130}$;
г) $(2\log_{12} 2+\log_{12} 3)(2\log_{12} 6-\log_{12} 3)$.

67. Прологарифмируйте по основанию a выражение:

а) $25b^3\sqrt[4]{c^7}$ при $a=5$; б) $\dfrac{0{,}0016b^4}{c\sqrt[7]{c^2}}$ при $a=0{,}2$, $b>0$, $c>0$.

68. Найдите x, если:

а) $\log_4 x=2\log_4 10+\frac{3}{4}\log_4 81-\frac{2}{3}\log_4 125$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} x=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 16-\log_{\frac{1}{3}} 8+\log_{\frac{1}{3}} 28$.

69. Вычислите при помощи таблиц:

а) $\dfrac{7{,}832\cdot\sqrt[4]{12{,}98}}{5{,}256^2}$; б) $\dfrac{102{,}3^2}{\sqrt[3]{92{,}14}\cdot 6{,}341}$.

70. Упростите и найдите приближенное значение выражения

$$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\ldots\cdot\log_{10} 9.$$

71. Известно, что $\log_2(\sqrt{3}+1)+\log_2(\sqrt{6}-2)=A$.
Найдите сумму $\log_2(\sqrt{3}-1)+\log_2(\sqrt{6}+2)$.

§ 3. ФУНКЦИИ

8. Рациональные функции

72. Одно основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, угол при основании 30°. Задайте формулой:

а) площадь трапеции как функцию боковой стороны;

б) периметр трапеции как функцию ее высоты.

73. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно стороне основания. Задайте формулой:

а) объем призмы как функцию стороны основания;

б) площадь боковой поверхности призмы как функцию объема.

74. Материальная точка, двигаясь прямолинейно, совершает гармонические колебания. Задайте формулой:

а) координату точки как функцию времени;

б) скорость точки как функцию времени.

75. На рисунке 150 изображены графики движения двух туристов, которые вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B.

а) В какое время туристы прибыли в пункты A и B?

б) Сколько времени был в пути каждый из них?

в) В какое время каждый турист прибыл к месту остановки?

г) Сколько времени каждый из них отдыхал?

д) С какой скоростью двигался каждый турист до остановки и после нее?

е) Какова средняя скорость движения каждого туриста?

76. По графику функции (рис. 151) ответьте на вопросы:

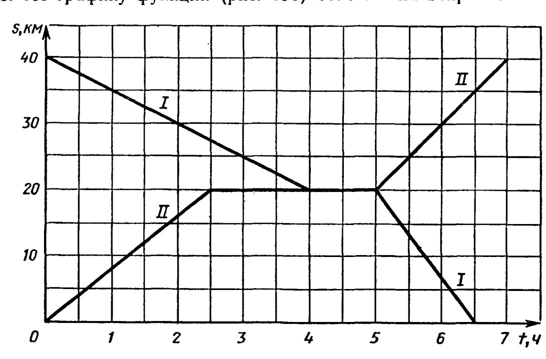


Рис. 150

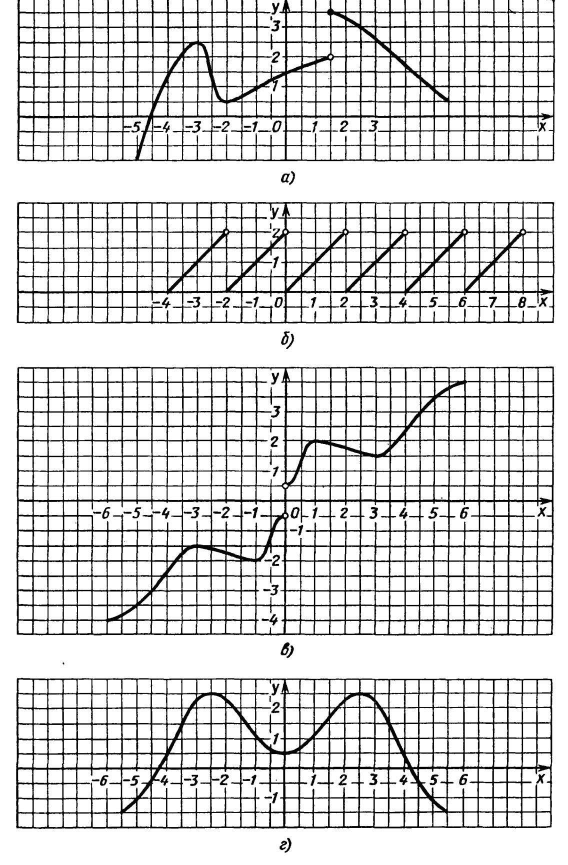
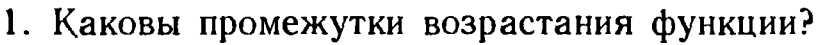

y
3
2
1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
а)
y
2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x
б)
y
3
2
1
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
x
-1
-2
-3
-4
в)
y
2
1
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
x
-1
г)

Рис. 151



1. Каковы промежутки возрастания функции?
2. Каковы промежутки убывания функции?
3. Назовите точки максимума и минимума функции. Какие значения принимает функция в этих точках?
4. Каковы наибольшее и наименьшее значения этих функций на отрезке $[-2; 2]$?
5. В каких точках функция не является непрерывной и каковы значения функции в этих точках?
6. На каких промежутках функция непрерывна?
7. Какие из этих функций четные и какие нечетные?

77. Найдите область определения функции:

а) $y=\frac{x-2}{x^2+2x-8}$; б) $y=\frac{x^2}{x^4-1}$;

в) $y=\frac{x^2-1}{x^4-9x^2+20}$; г) $y=\frac{x}{3x^2-5x+4}$.

78. Найдите промежутки непрерывности функции:

а) $y=\frac{x-4}{x^3-x}$; б) $y=x^2+\frac{4}{x-1}$;

в) $y=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$; г) $y=\frac{1}{3x^3-2x^2+5}$.

79. Докажите четность (нечетность) функции:

а) $y=x^3-3x$; б) $y=\frac{5x^3}{1-x^2}$;

в) $y=x^4(x^2+2)$; г) $y=\frac{|x|+2}{x^2}$.

80. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $y=\frac{x-1}{3x}$; б) $y=\frac{x^2-4x-5}{9-x^2}$;

в) $y=1-\frac{2x-3}{5-x}$; г) $y=2x^2-5x+2$.

81. Найдите промежутки возрастания (убывания), точки максимума и точки минимума функции:

а) $y=4x^2+3x-1$; б) $y=1-\frac{2}{x}$;

в) $y=(x-1)^4-2$; г) $y=\frac{x+1}{x-1}$.

Исследуйте функцию и постройте ее график (82, 83):

82. а) $y=3x-5$; б) $y=2x^2-7x+3$;

в) $y=2-\frac{1}{4}x$; г) $y=12-4x-x^2$.

83. а) $y=2-\frac{3}{x+1}$; б) $y=(x-2)^3-1$;
в) $y=\frac{x^4+1}{x^4}$; г) $y=4-(x+2)^4$.

Постройте график каждой из функций (84—86).

84. а) $y=3x-2$; б) $y=x^2-4x-5$; в) $y=\frac{1}{x}-1$; г) $y=x^3+2$.

85. а) $y=3x+|x|$; б) $y=|-x^2-x+2|$;
в) $y=2x-|x-3|$; г) $y=x^2-4|x|+3$.

86. а) $y=\frac{x+1}{|x|}$; б) $y=\frac{1}{x^2}+2$;
в) $y=\frac{|x|-2}{x}$; г) $y=\frac{2x^3-1}{x^3}$.

87. Имеют ли общие точки графики функций:
а) $y=x^2$ и $y=x+6$; б) $y=\frac{3}{x}$ и $y=4(x+1)$;
в) $y=x^4$ и $y=2x^2+1$; г) $y=\frac{1}{x^2}$ и $y=x^2-2$?

88. Докажите, что уравнение имеет корень, принадлежащий заданному промежутку I:
а) $x^3-6x+2=0$, $I=[0;\ 1]$; б) $x^4-3x^2+\frac{2}{9}=0$, $I=[1;\ 2]$;
в) $x^5+3x=5$, $I=[1;\ 2]$; г) $4+2x^3-x^5=0$, $I=[-1;\ 2]$.

Решите графически уравнения (неравенства) (89, 90).

89. а) $4-3x\leqslant x+2$; б) $x^2-2x=-x$;
в) $\frac{1}{x}=4x$; г) $x^2+2x+2\geqslant x+1$.

90. а) $x^3=\frac{8}{x-1}$; б) $|1-x|=2-|x|$;
в) $x^3=\frac{1}{x}$; г) $|x-1|=3-|x|$.

91. График функции $y=ax+b$ проходит через точки $A(2;\ 1)$, $B(5;\ 10)$. Найдите a и b.

92. По графику квадратичной функции (рис. 152) определите знаки коэффициентов a, b, c и дискриминанта D.

93. Может ли линейная или квадратичная функция быть: а) четной; б) нечетной; в) периодической?

94. Представьте функцию в виде суммы четной и нечетной функций:
а) $y=\frac{x+1}{|x|}$; б) $y=x^3-x|x|+3$;
в) $\frac{x^3+x^2-x}{x^4-1}$; г) $y=2x^5+x^4-3x+8$.



а)

б)

в)

г)

д)

е)

Рис. 152

95. Является ли четной или нечетной функция:

а) $y=5x^6-2x^2-3$;   б) $y=4x^5-2x^3+x$;

в) $y=\frac{3}{x^2}+1$;   г) $y=-\frac{2}{x^3}$?

9. Тригонометрические функции

Найдите область определения каждой из функций (96, 97).

96. а) $y=\frac{2}{\cos^2 x}$; б) $y=\frac{1}{1+2\sin 2x}$;

в) $y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{2}}$; г) $y=\frac{x}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$.

97. а) $y=\sqrt{\sin x\cos x}$; б) $y=\sqrt{x}\operatorname{tg} x$;

в) $y=\sqrt{\sin^2 x-\cos^2 x}$; г) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$.

Найдите область значений каждой из функций (98, 99).

98. а) $y=1-3\sin\frac{x}{2}$; б) $y=2\cos x\operatorname{tg} x$;

в) $y=2+3\cos 5x$; г) $y=2|\sin x|-1$.

99. а) $y=\frac{1}{1+\sin 2x}$; б) $y=\sqrt{1-\cos 4x}$;

в) $y=\frac{3}{\cos x-1}$; г) $y=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

100. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $y=3\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=1-\operatorname{tg} 3x$;

в) $y=1-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$; г) $y=1+2\cos 2x$.

101. Какие из данных функций являются четными, какие - нечетными:

а) $y=\operatorname{tg} 3x-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; б) $y=\frac{\sin x\cos^2 x}{x}$;

в) $y=\sin\frac{x^3-x}{x^2-1}$; г) $y=\frac{\sin x}{x}-\cos x$?

102. Среди данных функций укажите периодические и найдите наименьшие положительные периоды таких функций:

а) $y=1-\sin 5x$; б) $y=x\sin^2 x-x\cos^2 x$;

в) $y=3\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; г) $y=(\sin x+\cos x)^2$.

103. Найдите промежутки возрастания (убывания), точки максимума, точки минимума функции:

а) $y=1+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=\frac{2}{1-\cos x}$;

в) $y=0{,}5\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$; г) $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

104. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции (если они существуют):

а) $y=\cos 2x+\sin^2 x$; б) $y=1-4\sin 3x$;
в) $y=\sin x-\cos x$; г) $y=1+|\operatorname{tg} x|$.

Постройте графики функций (105, 106).

105. а) $y=2\sin^2\frac{x}{2}$; б) $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$;
в) $y=1+2\cos 2x$; г) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-2$.

106. а) $y=\frac{|x|\sin x}{x}$; б) $y=(\sin x-\cos x)^2$;
в) $y=\cos x+|\cos x|$; г) $y=\sin x\operatorname{ctg} x$.

107. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y=\frac{1}{2}+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$;
в) $y=1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; г) $y=1-\operatorname{tg} 2x$.

108. Известно, что x_0 — корень уравнения $\sin\frac{x}{10}=x^3$. Следует ли отсюда, что число $(-x_0)$ является корнем этого уравнения?

109. Сравните числа:

а) $\sin\left(\pi+\frac{1}{\pi}\right)$ и $\cos\left(\pi+\frac{1}{\pi}\right)$; б) $\operatorname{tg}\pi^2$ и $\operatorname{ctg}\pi^2$;
в) $\operatorname{tg} 2$ и $\operatorname{ctg} 2$; г) $\sin 1$ и $\cos 1$.

110. Докажите: а) $\sin\alpha+\cos\alpha>1$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;
б) $\cos(\sin\alpha)>0$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$.

111. Решите графически уравнение:

а) $\sin x=-x$; б) $\operatorname{tg} x=\sqrt{2}\cos x$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$;
в) $\operatorname{tg} x=x$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$; г) $\cos x=1-x^2$.

10. Степенная, показательная и логарифмическая функции

Найдите область определения каждой из функций (112—114).

112. а) $y=\sqrt{16x-x^3}$; б) $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3+8}}$;
в) $y=\sqrt[6]{5-x-\frac{4}{x}}$; г) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+x-20}}$.

113. а) $y=\sqrt{x^2\cdot 3^x-3^{x+1}}$; б) $y=\sqrt[8]{2^{\sin x}-1}$;
в) $y=\log_3(4-3x+x^2)$; г) $y=\log_2\sin x$.

114. а) $y=\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\lg (x+10)^2}$;   б) $y=\sqrt{\log_5 \cos x}$;

в) $y=\frac{\ln (3x-2)}{x^2-x-2}$;   г) $y=\sqrt[4]{\lg (3x^2-2x)}$.

Найдите область значений каждой из функций (115, 116).

115. а) $y=2\sqrt{x+1}$;   б) $y=5^{2-x}-1$;

в) $y=2\lg x+1$;   г) $y=3x^{-2}$.

116. а) $y=2^{\cos x}$;   б) $y=2-\sqrt[4]{x}$;

в) $y=1+|\log_2 x|$;   г) $y=1+|\sqrt[3]{x}|$.

Найдите промежутки знакопостоянства каждой из функций (117, 118).

117. а) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-4$;   б) $y=\log_4 (x+3)$;

в) $y=2-3^x$;   г) $y=\sqrt{x}-4$.

118. а) $y=4^{x+2}-4^x$;   б) $y=\lg (x-2)-1$;

в) $y=\sqrt{x}+3$;   г) $y=2-\sqrt[3]{x}$.

Найдите среди данных функций четные и нечетные (119, 120).

119. а) $y=5^x+5^{-x}$;   б) $y=\lg (1-x^2)$;

в) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$;   г) $y=x\sqrt[3]{x}$.

120. а) $y=x^{\frac{2}{3}}$;   б) $y=3^x-3^{-x}$;

в) $y=2^{\cos x}$;   г) $y=\sqrt[5]{x^4}+1$.

121. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y=2\sqrt{x}-1$;   б) $y=4^{x-1}-2$;

в) $y=\frac{1}{2}\log_2 (x+1)$;   г) $y=\sqrt[3]{x-2}+1$.

Постройте графики функций (122, 123).

122. а) $y=\sqrt{x-2}+1$;   б) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$;

в) $y=2-\sqrt[3]{x+1}$;   г) $y=1+\log_2 (x+2)$.

123. а) $y=5^{\log_5 (x-1)}$;   б) $y=|\log_{\frac{1}{2}} x|-1$;

в) $y=2^{|x|}$;   г) $y=\log_2 x^2$.

124. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции (если они существуют):

а) $y=\sqrt{36-x^2}$;   б) $y=\begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 7, \\ x^3+1 & \text{при } -2\leqslant x<0; \end{cases}$

в) $y=3^{\sin x}$; г) $y=\begin{cases} (x-1)^2 & \text{при } -1\leqslant x<1, \\ \log_2 x & \text{при } 1\leqslant x\leqslant 8. \end{cases}$

125. Решите графически уравнение:

а) $\log_{\frac{1}{2}} x=x-3$; б) $\sqrt{x-2}=\frac{3}{x}$;
в) $\log_2 x=2^{5-x}$; г) $2^{|x|}=11-|x|$.

126. Решите графически неравенство:

а) $\log_{\frac{1}{2}} x>x-3$; б) $\sqrt{x-2}\leqslant\frac{3}{x}$;
в) $2^{-|x|}\geqslant x^2+1$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x>2x-7$.

127. Докажите, что наибольшие значения функций $y=(\log_2 3)^{\sin x}$ и $y=(\log_3 2)^{\cos x}$ равны.

128. Найдите значение аргумента x_0, если:

а) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x+1}}-\sqrt{1-x^2}$, $f(x_0)=0$;
б) $f(x)=\lg(x+15)+\lg x$, $f(x_0)=2$.

129. Докажите, что:

а) функция $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ убывает на множестве $\boldsymbol{R}$;
б) функция $f(x)=\log_2 3x$ возрастает на промежутке $(0;\ \infty)$.

§ 4. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

11. Рациональные уравнения и неравенства

Решите уравнения (130, 131).

130. а) $3(x-2)-5=4-(5x-1)$; б) $|2x-3|=5$;
в) $7-2(3-x)=4(x-1)+5$; г) $|4-3x|=2$.

131. а) $\frac{3x+1}{5}=2-\frac{4(x-3)}{15}$; б) $\left|\frac{x-3}{2}+5\right|=4$;
в) $1-\frac{x-3}{2}=x-\frac{3(5-2x)}{7}$; г) $\left|1-\frac{x+2}{3}\right|=5$.

132. При каких значениях a данное уравнение:

а) $ax-2x=3(x-1)$; б) $a(1-x)+2=3x-ax$;
в) $x(2-a)-x=5+x$; г) $5+3(x+3a)=9a+5$ —

имеет единственное решение; не имеет решений; имеет бесконечное множество решений?

Решите неравенства (133—135).

133. а) $\frac{x-1}{2}+x<1{,}5x+3{,}5$; б) $\frac{5x-2}{3}-\frac{3-x}{2}>1$;

в) $x-4(3-x)\geqslant 2x+7$; г) $3+\frac{2-3x}{4}\leqslant 2x$.

134. а) $|4x-3|<5$; б) $|2x+5|\geqslant 1$;

в) $\frac{|x-7|}{3}\leqslant 2$; г) $4\,|2-x|\leqslant 12$.

135. а) $\frac{|2x-3|}{x}>0$; б) $\frac{x+2}{|x+4|}\leqslant 0$;

в) $(x-4)|5-3x|<0$; г) $|2x+7|\,(3-x)\leqslant 0$.

136. Решите уравнение:

а) $x^2+2x-15=0$; б) $7x^2+5x=0$;

в) $(x-3)(x-2)=6(x-3)$; г) $x^2-\frac{11x}{6}+\frac{1}{2}=0$.

137. При каком значении a имеют общий корень уравнения:

а) $x^2-ax=0$ и $x^2-x-3a=0$;

б) $x^2-(a-1)x=3$ и $4x^2-(4a+3)x+9=0$;

в) $x^2+ax+8=0$ и $x^2+x+a=0$;

г) $2x^2+(3a-1)x=3$ и $6x^2-(2a-3)x=1$?

138. Найдите значения k, при которых имеет один корень уравнение:

а) $(k-1)x^2+(k+4)x+k+7=0$; б) $9x^2-2x+k=6-kx$;

в) $(2k-5)x^2-2(k-1)x+3=0$; г) $3kx^2-6x+k-2=0$.

139. Не решая уравнения $3x^2-5x-2=0$, найдите: а) сумму его корней; б) произведение его корней; в) сумму квадратов его корней; г) сумму кубов его корней.

Решите уравнения (140, 141).

140. а) $\frac{6x-x^2-6}{x-1}-\frac{2x-3}{x-1}=1$; б) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$;

в) $\frac{2}{x^2+5x}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$; г) $\frac{14}{x^2-4}+\frac{3}{(2-x)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$.

141. а) $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2$; б) $2x^4-5x^2+2=0$;

в) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\frac{x-1}{x}\right)+2=0$; г) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}5$.

Решите неравенства (142—144).

142. а) $2x^2+6x+17>0$; б) $x^2-3{,}2x<0$;

в) $(3x-2)^2-4x(2x-3)\geqslant 0$;

г) $(6x-1)(1+6x)+14<7x(2+5x)$.

143. а) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}\geqslant 0$; б) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}\leqslant 0$;

в) $\frac{x-2}{(x-3)(x-5)}<0$; г) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}>0$.

144. а) $(x-1)(x+2)(x-3)(x-4)\leqslant 0$; б) $x^4-3x^2+2\leqslant 0$;

в) $\frac{4-x}{x-5}>\frac{1}{1-x}$; г) $1+\frac{12}{x^2}<\frac{7}{x}$.

145. Докажите справедливость неравенства:

а) $m+\frac{4}{m}\geqslant 4$ при $m>0$; б) $\frac{2m}{1+m^2}\leqslant 1$;

в) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$ при $a>0$, $b>0$;

г) $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$ при $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a<b$.

12. Иррациональные уравнения и неравенства

Решите уравнения (146—149).

146. а) $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$; б) $\sqrt{x^2-16}=x^2-22$;

в) $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1$; г) $\sqrt{x^2+9}=x^2-11$.

147. а) $\sqrt{x+17}-\sqrt{x-7}=4$; б) $2\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}=3$;

в) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$; г) $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[6]{x+1}=6$.

148. а) $\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{2+x}}+\sqrt{2+x}=0$; б) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-2=0$;

в) $\frac{x-\sqrt{x+5}}{x+\sqrt{x+5}}=\frac{1}{7}$; г) $\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt{3x+1}=0$.

149. а) $\sqrt{225+x^2}=x^2-47$; б) $\sqrt[3]{x-2}=x-2$;

в) $\sqrt{x^2+36}=x^2-54$; г) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2$.

Решите неравенства (150, 151).

150. а) $\sqrt{x^2-5}\geqslant 2$; б) $\sqrt{(x-2)(1-2x)}>-1$;

в) $\sqrt{x^2-16}\geqslant 1$; г) $(\sqrt{x}-3)(x^2+1)>0$.

151. а) $\sqrt{x^2-6x+9}>3$; б) $\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x^2+x+1}\geqslant 0$;

в) $\sqrt{25-20x+4x^2}\leqslant 1$; г) $\sqrt{2x-x^2+15}\,(3x-x^2-4)\leqslant 0$.

13. Тригонометрические уравнения и неравенства

Решите уравнения (152—158).

152. а) $\cos x+2\cos 2x=1$; б) $4\sin 2x-3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=5$;

в) $2\cos^2 x+4\cos x=3\sin^2 x$; г) $\cos^2 x+4\sin^2 x=2\sin 2x$.

153. а) $\sin^3 x-\cos^3 x=1+\frac{\sin 2x}{2}$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$;

в) $\cos^4 x-\sin^4 x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1$.

154. а) $\cos 4x+2\cos^2 x=1$; б) $4(1+\cos x)=3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$;

в) $\cos 3x+\sin x\sin 2x=0$; г) $4(1-\cos x)=3\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$.

155. а) $\cos 2x-\cos 6x=0$; б) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$;

в) $\sin x+\sin 3x=0$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+\sin x=2\cos 3x$.

156. а) $\frac{6}{\operatorname{ctg} x+2}=3-\operatorname{ctg} x$; б) $1+2\cos 3x\cos x-\cos 2x=0$;

в) $\frac{15}{\sin x+1}=11-2\sin x$; г) $\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$.

157. а) $\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x=0$; б) $\operatorname{tg} x-\sin x=2\sin^2\frac{x}{2}$;

в) $\sin x\operatorname{tg} x=\cos x+\operatorname{tg} x$; г) $\sin x+\sin 2x=\operatorname{tg} x$.

158. а) $\arccos\frac{1+2x}{3}=\frac{2\pi}{3}$; б) $\operatorname{arctg}(2x-1)=-\frac{\pi}{4}$;

в) $\arcsin\frac{x+2}{4}=-\frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{arctg}(2-3x)=\frac{3\pi}{4}$.

Решите неравенства (159—162).

159. а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\geqslant-1$;

в) $\sin 2x\sin\frac{x}{2}-\cos 2x\cos\frac{x}{2}>\frac{1}{2}$;

г) $\sin 3x\cos x+\sin x\cos 3x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

160. а) $2\sin^2 x\leqslant 1$; б) $3\operatorname{tg}^2 2x\leqslant 1$; в) $4\cos^2 x\leqslant 3$; г) $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-1\geqslant 0$.

161. а) $|\cos x-1|\leqslant 0{,}5$; б) $\sin x<\cos x$;

в) $\left|\sin 2x+\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$; г) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x>0$.

162. а) $\sin x-\sqrt{3}\cos x>\sqrt{3}$; б) $\log_{0,5}\sin x>1$;

в) $\sin x+\cos x<1$; г) $\log_{\sqrt{2}}\cos x>-1$.

14. Показательные уравнения и неравенства

Решите уравнения (163—167).

163. а) $(0{,}2)^{x^2-16x-37{,}5}=5\sqrt{5}$; б) $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot(10^{x-1})^3$;

в) $2^{x^2-6x+0{,}5}=\frac{1}{16\sqrt{2}}$; г) $\frac{6^{x^2}}{2^{-15}}=\frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$.

164. а) $5^{3x}-2\cdot 5^{3x-1}-3\cdot 5^{3x-2}=60$; б) $4^x-3^{x-0{,}5}=3^{x+0{,}5}-2^{2x-1}$;

в) $2^{5x-1}+2^{5x-2}+2^{5x-3}=896$; г) $5^{2x-1}+2^{2x}=5^{2x}-2^{2x+2}$.

165. а) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$; б) $5^{3x+1}+34\cdot 5^{2x}=7\cdot 5^x$;

в) $16^x-50\cdot 2^{2x}=896$; г) $7^{4\sqrt{x}}-8\cdot 7^{\sqrt{4x}}+7=0$.

166. а) $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$; б) $8^x+18^x=2\cdot 27^x$;

в) $2\cdot 25^x-5\cdot 10^x+2\cdot 4^x=0$; г) $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$.

167. а) $3^{2\sqrt{x}}+3^{2\sqrt{x}-1}-3^{2\sqrt{x}-2}=11$; б) $5^{\sin^2 x}-25^{\cos x}=0$;

в) $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$; г) $3\cdot 9^{\frac{1}{x}}+6^{\frac{1}{x}}=2\cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

Решите неравенства (168—170).

168. а) $\frac{16}{\sqrt{32}}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}$; б) $3^{x^2+x}<10^{\lg 9}$;

в) $3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2-3x}<\frac{1}{9}$; г) $4^{x^2+x-11}>5^{\log_5 4}$.

169. а) $0{,}04^x-26\cdot 0{,}2^x+25\leqslant 0$; б) $9^x-84\cdot 3^{-2x}+\frac{1}{3}>0$;

в) $4^x-10\cdot 2^x+16<0$; г) $2^{2x+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}-\frac{5}{2}\geqslant 0$.

170. а) $x^2\cdot 3^x-3^{x+1}\leqslant 0$; б) $3{,}7^{\frac{x^2+2x-15}{x-4}}>1$;

в) $x^2\cdot 5^x-5^{2+x}<0$; г) $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$.

15. Логарифмические уравнения и неравенства

Решите уравнения (171—175).

171. а) $\log_3^2 x=4-3\log_3 x$;

б) $\frac{1}{2}\lg(2x-1)=1-\lg\sqrt{x-9}$;

в) $\log_3\sqrt{x-5}+\log_3\sqrt{2x-3}=1$;

г) $3\lg^2(x-1)-10\lg(x-1)+3=0$.

172. а) $2\log_5(\lg x)=\log_5(10-9\lg x)$;

б) $\lg(3^x+x-17)=x\lg 30-x$;

в) $2\lg(\lg x)=\lg(3-2\lg x)$;

г) $x-x\lg 5=\lg(2^x+x-3)$.

173. а) $\log_2 x+\frac{4}{\log_x 2}=5$; б) $\log_3 x+\log_{\sqrt{x}} x-\log_{\frac{1}{3}} x=6$;

в) $2\log_{\sqrt{3}} x+\log_x \frac{1}{3}=3$; г) $\log_{\sqrt{2}} x+4\log_{x^2} x+\log_8 x=16$.

174. а) $x^{\log_2 x-2}=8$; б) $x^{\log_5 x}=125x^2$;

в) $x^{\lg x}=10\,000$; г) $x^{\log_3 x-3}=\frac{1}{9}$.

175. а) $3\log_2^2 \sin x+\log_2(1-\cos 2x)=2$;

б) $\log_{0,1}\sin 2x+\lg\cos x=\lg 7$;

в) $\log_7 5^{\sqrt{x+2}}=(x-4)\log_7 5$;

г) $\lg(3\cdot 5^x+24\cdot 20^x)=x+\lg 18$.

Решите неравенства (176—179).

176. а) $\log_2(x^2-x-4)<3$; б) $\log_{\sqrt{3}-1}(5-2x)>2$;

в) $\lg(x^2-x+8)\geqslant 1$; г) $\log_{\sqrt{7}-1}(3-2x)<2$.

177. а) $2\log_2 x<2+\log_2(x+3)$;

б) $\log_{\frac{1}{6}}(10-x)+\log_{\frac{1}{6}}(x-3)\geqslant -1$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)+\log_{\frac{1}{3}}(12-x)\geqslant -2$;

г) $\log_{0,5}(4-x)\geqslant\log_{0,5}2-\log_{0,5}(x-1)$.

178. а) $\lg(x^2+x-6)-\lg(x+3)\leqslant\lg 3$; б) $\log_2\frac{3x-1}{2-x}<1$;

в) $\ln(x^2+3x-10)-\ln(x-2)\geqslant\ln 4$; г) $\log_3\frac{3x-5}{x+1}\leqslant 1$.

179. а) $\log_2(4^x-5\cdot 2^x+8)>2$; б) $\log_{0,5}^2 x+6\geqslant 5\log_{0,5} x$;

в) $\lg^2 x\geqslant\lg x+2$; г) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2$.

16. Системы рациональных уравнений и неравенств

Решите системы уравнений (180—183).

180. а) $\begin{cases}2x+3y=-1,\\5x+4y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x-9y=12,\\4x-12y=16;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+2y=7,\\2x-3y=5;\end{cases}$ г) $\begin{cases}5x-8y=0,\\x-1{,}6y=1.\end{cases}$

181. а) $\begin{cases}\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{13}{6},\\x+y=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-y=1,\\x^3-y^3=7;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\frac{y}{x}=2,\\(x-1)^2+y^2=1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^3+y^3=35;\\x+y=5.\end{cases}$

182. а) $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=45,\\x+y=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2y^3+x^3y^2=12,\\x^2y^3-x^3y^2=4;\end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2y^3=16, \\ x^3y^2=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-xy=28, \\ y^2-xy=-12. \end{cases}$

183. а) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^3y^3=-8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^4=5, \\ xy^2=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ xy=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5, \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13. \end{cases}$

184. При каком значении a система уравнений:

а) $\begin{cases} x-5y=7, \\ ax-y=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y=a, \\ 2x+4y=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+ay=2, \\ 3x-2y=-6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=2, \\ 2x-2y=2a \end{cases}$ —

имеет единственное решение, не имеет решений, имеет бесконечное множество решений?

185. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x>3-\frac{13x-2}{11}, \\ \frac{x}{6}+\frac{2}{3}(x-7)<\frac{3x-20}{9}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+4}{3}\leqslant\frac{x-1}{4}-2, \\ 1{,}5x-2{,}5<x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x+1}{2}-\frac{x}{3}\geqslant\frac{x-1}{4}-x-2, \\ 0{,}5x<2-x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2(3x-1)<3(4x+1)+16, \\ 4(2+x)<3x+8. \end{cases}$

17. Системы иррациональных уравнений

Решите системы уравнений (186—188).

186. а) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4, \\ 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8, \\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8, \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{xy}=12, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7. \end{cases}$

187. а) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7, \\ xy=9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=6, \\ x-y=12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy=64, \\ x-y+\sqrt{xy}=20. \end{cases}$

188. а) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=26, \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\frac{3}{4}, \\ xy=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=5, \\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3, \\ xy=8. \end{cases}$

18. Системы тригонометрических уравнений

Решите системы уравнений (189, 190).

189. а) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}25, \\ \sin y \cos x = 0{,}75; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}, \\ \cos^2(\pi x) - \cos^2(\pi y) = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4 \sin x \sin y = 3, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \sin y. \end{cases}$

190. а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{2}, \\ \sin x + \cos 2y = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \cos 2y + \cos x = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

19. Системы показательных и логарифмических уравнений

Решите системы уравнений (191—196).

191. а) $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 16, \\ x + y = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (\sqrt{5})^{x-y} = 25, \\ 2^{6y-x-1} = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 28, \\ x - y = 3. \end{cases}$

192. а) $\begin{cases} 4^{\log_4 2x} - y = -1, \\ 5^{2x-y} + 5^x = 5{,}2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17, \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^{\log_3 (y+x)} = 2, \\ 2^{2x+y} = 16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}} (y - x) = 4, \\ 3^x + 2 \cdot 3^{y-2} = 171. \end{cases}$

193. а) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63, \\ 3^x + 7^y = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ \sqrt{3^x} - 2^y = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4^x \cdot 4^y = 64, \\ 4^x - 4^y = 63; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{2^x} - 3^y = -7, \\ 2^x - 3^y = -5. \end{cases}$

194. а) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_2 (x^2 + y^2) = 5, \\ 2 \log_4 x + \log_2 y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_2 (x+1) = \log_2\left(y + \frac{1}{4}\right), \\ \log_2 x - 2 \log_2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0. \end{cases}$

195. а) $\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{1 + \log_3 (x^2 + y^2)} = 15, \\ \log_3 (x^2 - y^2) - \log_3 (x - y) = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5^{1 + \log_5 (x^2 - y^2)} = 25, \\ \log_5 (x^2 - y^2) = \log_5 (x + y). \end{cases}$

196. а) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_9 x - \log_3 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15, \\ 3^y \log_2 x = 2\log_2 x + 3^{y+1}. \end{cases}$

20. Задачи на составление уравнений и систем уравнений

197. Время, затрачиваемое автобусом на прохождение расстояния 325 км, при составлении нового расписания движения автобусов сокращено на 40 мин. Найдите среднюю скорость движения автобуса по новому расписанию, если она на 10 км/ч больше средней скорости, предусмотренной старым расписанием.

198. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 15 км, прошла $139\frac{1}{3}$ км вниз по течению реки и вернулась обратно. Найдите скорость течения реки, если на весь путь затрачено 20 ч.

199. Поезд должен был пройти 220 км за определенное время. Через 2 ч после начала движения он был задержан на 10 мин и, чтобы прийти вовремя в пункт назначения, увеличил скорость на 5 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

200. После встречи двух теплоходов один из них пошел на юг, а другой — на запад. Через 2 ч после встречи расстояние между ними было 60 км. Найдите скорость каждого теплохода, если известно, что скорость одного из них на 6 км/ч больше скорости другого.

201. Два тела движутся навстречу друг другу из двух точек, расстояние между которыми 390 м. Одно тело прошло в первую секунду 6 м, а в каждую следующую проходило на 6 м больше, чем в предыдущую. Второе тело двигалось равномерно со скоростью 12 м/с и начало движение спустя 5 с после первого. Через сколько секунд после того, как начало двигаться первое тело, они встретятся?

202. На строительстве железнодорожной магистрали бригада строителей за несколько дней должна была по плану переместить 2160 м^3 грунта. В течение первых трех дней бригада ежедневно выполняла установленную норму, а затем каждый день перевыполняла норму на 80 м^3, поэтому уже за день до срока бригада переместила 2320 м^3 грунта. Какова по плану дневная норма бригады?

203. Две бригады комсомольцев, работая совместно, закончили посадку деревьев на учебно-опытном участке за 4 дня. Сколько дней потребовалось бы на выполнение этой работы каждой бригаде отдельно, если одна из бригад могла бы закончить посадку деревьев на 6 дней раньше другой?

204. Для перевозки 60 т груза затребовали некоторое количество машин. В связи с тем что на каждую машину погрузили на 0,5 т меньше запланированного, дополнительно было затребовано еще 4 машины. Сколько машин было запланировано первоначально?

205. Два куска латуни имеют массу 30 кг. Первый кусок содержит 5 кг чистой меди, а второй кусок — 4 кг. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит меди на 15% больше первого?

206. К раствору, содержащему 40 г соли, добавили 200 г воды, после чего массовая доля растворенной соли уменьшилась на 10%. Сколько воды содержал раствор и какова была в нем массовая доля соли?

207. Две автомашины выехали одновременно из одного пункта в одном и том же направлении. Одна машина движется со скоростью 50 км/ч, другая — 40 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую машину на 1 ч 30 мин позже, чем вторую. Найдите скорость третьей машины.

208. Найдите скорость и длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

209. Из пунктов A и B, расположенных на расстоянии 50 км, одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода. Через 5 ч они встретились. После встречи пешеход, идущий из A в B, уменьшил скорость на 1 км/ч, а второй увеличил скорость на 1 км/ч. Первый пешеход прибыл в B на 2 ч раньше, чем второй в A. Найдите первоначальную скорость каждого пешехода.

210. На заводе для изготовления одного электродвигателя типа A расходуется 2 кг меди и 1 кг свинца, на изготовление одного электродвигателя типа B — 3 кг меди и 2 кг свинца. Сколько электродвигателей каждого типа было изготовлено, если всего израсходовали 130 кг меди и 80 кг свинца?

211. Двое рабочих совместно могут выполнить плановое задание за 12 дней. Если половину задания будет выполнять один рабочий, а затем вторую половину — другой, то все задание будет выполнено за 25 дней. За сколько дней может выполнить задание каждый рабочий?

212. Из двух жидкостей, плотность которых соответственно 1,2 г/см^3 и 1,6 г/см^3, составлена смесь массой 60 г. Сколько граммов каждой жидкости в смеси и какова плотность смеси, если ее 8 см^3 имеют такую же массу, как масса всей менее тяжелой из смешанных жидкостей?

213. Вычислите массу и массовую долю (в процентах) серебра в сплаве с медью, зная, что, сплавив его с 3 кг чистого серебра, получат сплав, содержащий 90% серебра, а сплавив его

с 2 кг сплава, содержащего 90% серебра, получают сплав с 84%-ной массовой долей серебра.

214. По окружности, длина которой 60 м, равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна делает полный оборот на 5 с скорее другой и при этом догоняет вторую точку каждую минуту. Найдите скорость каждой точки.

215. Сумма квадратов цифр положительного двузначного числа равна 13. Если из этого числа вычесть 9, то получится число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Найдите это число.

216. Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55.

§ 5. ПРОИЗВОДНАЯ, ПЕРВООБРАЗНАЯ, ИНТЕГРАЛ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

21. Производная

217. Найдите отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ для функции f, если:

а) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}1$;

б) $f(x)=\sqrt{x-1}$, $x_0=2$, $\Delta x=0{,}21$;

в) $f(x)=3-2x$, $x_0=2$, $\Delta x=0{,}2$;

г) $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}1$.

218. Пользуясь определением, найдите производную функции f в точке x_0, если:

а) $f(x)=1-4x$, $x_0=3$; б) $f(x)=1{,}5x^2$, $x_0=2$;

в) $f(x)=3x+2$, $x_0=5$; г) $f(x)=x^3+1$, $x_0=-1$.

Найдите производные функций (219—222).

219. а) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+5$;

б) $f(x)=(4-x^2)\sin x$;

в) $f(x)=(x^2+5)(x^3-2x+2)$;

г) $f(x)=\frac{\cos x}{2-x^3}$.

220. а) $f(x)=\frac{3}{x^3}-\sqrt[5]{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}$; б) $f(x)=(2-\sqrt{x})\lg x$;

в) $f(x)=\frac{x^3-3x}{1-2x}$; г) $f(x)=\frac{\sin x}{1-2\cos x}$.

221. а) $f(x)=2^x+\lg x$; б) $f(x)=e^{-3x}+2\log_3 2x$;

в) $f(x)=x^2\cdot 5^{2x}$; г) $f(x)=\frac{\ln x}{e^x+e^{-x}}$.

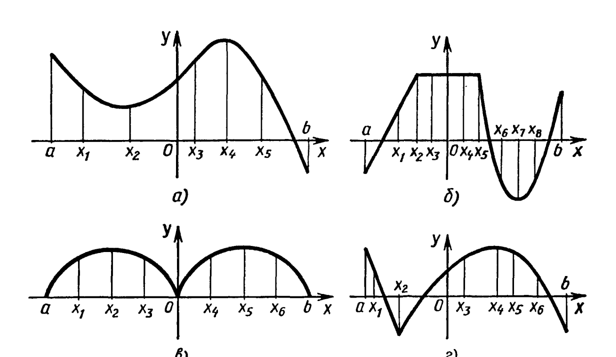


Рис. 153

222. а) $f(x)=\sin 3x+\cos 5x$; б) $f(x)=\sqrt[4]{1+x^2}+\frac{1}{(2x-1)^3}$;

в) $f(x)=(3-2x^3)^5$; г) $f(x)=\lg(3x)-3\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

223. Решите уравнение $f'(x)=0$, если:

а) $f(x)=x^4-2x^2+1$; б) $f(x)=1{,}5\sin 2x-5\sin x-x$;

в) $f(x)=-\frac{x^5}{5}+\frac{10x^3}{3}-9x$; г) $f(x)=x+\cos 2x$.

224. Функция задана графиком (рис. 153).

1) Укажите, в каких из отмеченных точек:

а) $f'(x)>0$; б) $f'(x)<0$; в) $f'(x)=0$.

2) Укажите промежутки, на которых:

а) $f'(x)>0$; б) $f'(x)<0$; в) $f'(x)=0$.

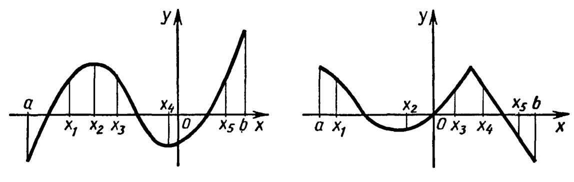


Рис. 154 Рис. 155

3) В каких точках интервала $(a; b)$ функция f не имеет производной?

Сравните значения производной в заданных точках (225, 226).

225. а) x_1 и x_2; б) x_1 и x_3; в) x_2 и x_4; г) x_3 и x_5 (рис. 154).

226. а) x_1 и x_2; б) x_3 и x_5; в) x_4 и x_5; г) x_2 и x_4 (рис. 155).

227. Функции u, v, w дифференцируемы в точке x. Докажите, что $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

22. Применение производной к исследованию функций

228. Вычислите приближенное значение функции в точках x_1 и x_2:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, $x_1 = 2{,}0057$, $x_2 = 1{,}979$;

б) $f(x) = 2 + 4x - x^2 + \frac{1}{4}x^4$, $x_1 = 3{,}005$; $x_2 = 1{,}98$.

229. Вычислите приближенное значение выражения:

а) $\sqrt{9{,}009}$; б) $1{,}0001^{15}$; в) $0{,}999^{-5}$; г) $\sqrt[3]{8{,}008}$.

Найдите промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума функций (230, 231).

230. а) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x + 18$; б) $f(x) = \frac{2x^2}{3-x}$;

в) $f(x) = \frac{x(x^3-4)}{2}$; г) $f(x) = \frac{x}{4-x}$.

231. а) $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$; б) $f(x) = 2 - \sin\frac{x}{2}$;

в) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$; г) $f(x) = 3x - \cos 3x$.

Исследуйте функцию и постройте ее график (232—234).

232. а) $f(x) = x^2(x-2)^2$; б) $f(x) = \frac{8}{x} + \frac{x}{2}$;

в) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$; г) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$.

233. а) $f(x) = 1 - 2\sin 2x$; б) $f(x) = \cos^2 x - \cos x$;

в) $f(x) = 3 - \cos\frac{x}{2}$; г) $f(x) = \sin^2 x - \sin x$.

234. а) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$; б) $f(x) = \frac{e^x}{x}$;

в) $f(x) = 2^{x^2-4x}$; г) $f(x) = x - \ln x$.

235. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f (если они существуют) на данном промежутке:

а) $f(x)=18x^2+8x^3-3x^4$, $[1; 3]$;

б) $f(x)=2\cos x-\cos 2x$, $[0; \pi]$;

в) $f(x)=\frac{2}{x}+x^2$, $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$;

г) $f(x)=\sin x-x$, $[-\pi; \pi]$.

236. Число 10 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма кубов этих чисел была: а) наибольшей; б) наименьшей.

237. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 20 см. Какой длины должны быть катеты, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

238. Сумма длин диагоналей параллелограмма равна 12 см. Найдите наименьшее значение суммы квадратов всех его сторон.

239. По двум улицам движутся к перекрестку две машины с постоянными скоростями 40 км/ч и 50 км/ч. Считая, что улицы прямолинейные и пересекаются под прямым углом, а также зная, что в некоторый момент времени автомашины находятся от перекрестка на расстоянии 2 км и 3 км (соответственно), определите, через какое время расстояние между ними станет наименьшим.

240. Картина высотой 1,4 м повешена на стену так, что ее нижний край на 1,8 м выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятно для осмотра картины (т. е. чтобы угол зрения по вертикали был наибольшим)?

241. Статуя высотой 4 м стоит на колонне, высота которой 5,6 м. На каком расстоянии должен встать человек ростом (до уровня глаз) 1,6 м, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

242. Из всех цилиндров, имеющих объем 16π м^3, найдите цилиндр с наименьшей площадью полной поверхности.

243. Найдите высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R.

244. В конус, радиус основания которого R и высота H, требуется вписать цилиндр, имеющий наибольшую площадь полной поверхности. Найдите радиус цилиндра.

245. Около данного цилиндра нужно описать конус наименьшего объема (плоскости оснований цилиндра и конуса совпадают). Как это сделать?

246. Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиусом R.

247. Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиусом R так, чтобы центр основания конуса лежал в центре шара.

248. Из круглого бревна диаметром 40 см требуется вырезать балку прямоугольного сечения с основанием b и высотой h. Прочность балки пропорциональна bh^2. При каких значениях b и h прочность будет наибольшей?

249. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Как определить размеры окна, имеющего наибольшую площадь при заданном периметре?

250. На окружности дана точка A. Провести хорду BC параллельно касательной в точке A так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.

251. Каков должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

252. На параболе $y=x^2$ найдите точку, расстояние от которой до точки $A\,(2;\ 0{,}5)$ наименьшее.

253. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

23. Применения производной в физике и геометрии

254. По прямой движутся две точки. Определите промежуток времени, в течение которого скорость первой точки была меньше скорости второй, если: а) $x_1(t)=2\frac{2}{3}t^3$, $x_2(t)=2t-3$; б) $x_1(t)=9t^2+1$, $x_2(t)=t^3$.

255. Угол поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени по закону $\varphi(t)=0{,}1t^2-0{,}5t+0{,}2$. Найдите угловую скорость вращения тела в момент времени $t=20$ с. (Угол измеряется в радианах.)

256. Круглый металлический диск расширяется при нагревании так, что его радиус равномерно увеличивается на 0,01 см/с. С какой скоростью увеличивается площадь диска в тот момент, когда его радиус равен 2 см?

257. Из пункта A по двум прямым, угол между которыми 60°, одновременно начали двигаться два тела. Первое движется равномерно со скоростью 5 км/ч, второе — по закону $s(t)=2t^2-t$. С какой скоростью они удаляются друг от друга в момент $t=3$ ч? (s измеряется в километрах, t — в часах.)

258. Концы отрезка AB длиной 5 м скользят по координатным осям. Скорость перемещения конца A равна 2 м/с. Какова величина скорости перемещения конца B в тот момент, когда конец A находится от начала координат на расстоянии 3 м?

259. Длина вертикально стоящей лестницы равна 5 м. Нижний конец лестницы начинает скользить с постоянной скоростью 2 м/с. С какой скоростью опускается в момент времени t верхний конец лестницы, с каким ускорением?

260. Неоднородный стержень AB имеет длину 12 см. Масса его части AM растет пропорционально квадрату расстояния точки M от конца A и равна 10 г при $AM=2$ см. Найди-

те: 1) массу всего стержня AB и линейную плотность в любой его точке; 2) линейную плотность стержня в точках A и B.

261. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 с. Найдите угловую скорость колеса через 48 с после начала вращения.

262. Тело с высоты 10 м брошено вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с. Ответьте на вопросы: а) на какой высоте от поверхности земли оно будет через 5 с? б) Через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от земли (считать $g=10$ м/с^2)?

263. В какой точке параболы $y=-\frac{x^2}{2}-1$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом: а) 45°; б) 135°?

264. Найдите абсциссы точек графика функции $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-x-3$, касательные в которых наклонены к оси абсцисс под углом 135°.

265. Докажите, что любая касательная к графику функции $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+x-3$ пересекает ось абсцисс.

266. Докажите, что любая касательная к графику функции $f(x)=x^5+2x-7$ составляет с осью абсцисс острый угол.

267. Докажите, что графики функций $f(x)=(x+2)^2$ и $g(x)=2-x^2$ имеют общую точку и общую касательную, проходящую через эту точку.

24. Первообразная

268. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=4\sin x+\cos 3x$; б) $f(x)=x^2+x^{-5}+x^{2+\sqrt{3}}$;

в) $f(x)=2+\frac{3}{x-1}$; г) $f(x)=\frac{2}{\cos^2 2x}+\frac{3}{\sin^2 3x}$.

269. Для функции f найдите первообразную, график которой проходит через точку M:

а) $f(x)=\frac{2}{x}$, $M\left(\frac{1}{e};\ 2\right)$;

б) $f(x)=x^{-2}+\cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ -\frac{2}{\pi}\right)$;

в) $f(x)=x^{-4}$, $M(2;\ -3)$;

г) $f(x)=\sin 2x$, $M(0;\ 1)$.

270. Найдите функцию, производная которой равна $2x-3$ в любой точке x и значение которой в точке 2 равно 2.

271. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $A(2;\ 3)$, если угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой x равен $3x^2$.

272. Материальная точка движется по координатной прямой со скоростью $v(t)=\sin t\cos t$. Найдите уравнение движения точки, если при $t=\frac{\pi}{4}$ ее координата равна 3.

25. Интеграл

273. Вычислите:

а) $\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(1{,}5\pi+0{,}5x)\,dx$; б) $\int\limits_{1}^{2} (x^{-2}+x^2)\,dx$;

в) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 3x-\sin 2x)\,dx$; г) $\int\limits_{-5}^{-2} (5-6x-x^2)\,dx$.

274. Найдите наибольшее и наименьшее значения интеграла:

а) $\int\limits_{0}^{a} \cos\frac{x}{2}\,dx,\ a\in \mathbf{R}$; б) $\int\limits_{0}^{a+\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx,\ a\in \mathbf{R}$.

275. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=0{,}5x^2-2x+3,\ y=7-x$;
б) $y=(x-2)^2,\ y=4-x^2$;
в) $y=x^2-3x+4,\ y=x+1$;
г) $y=x^2-2x+2,\ y=2+4x-x^2$.

276. Найдите площадь каждой из фигур, на которые прямая $y=x+4$ делит фигуру, ограниченную линиями $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y=8$.

277. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2{,}5+2x-0{,}5x^2$, $x=-1$ и касательной к данной параболе, проведенной через ее точку с абсциссой $x=3$.

278. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-4x+5$ и касательными к ней, проведенными через ее точки с абсциссами $x=1$ и $x=3$.

279. В каком отношении делится площадь квадрата параболой, проходящей через две его соседние вершины и касающейся одной стороны в ее середине?

280. При каком значении a площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+4x+a$ $(a>0)$, $x=0$, $x=2$ и $y=2$, равна 12? (Известно, что фигура лежит в верхней полуплоскости.)

281. Найдите пары чисел a и b, при которых функция $f(x)=$ $=a\sin\pi x+b$ удовлетворяет условиям: $f'(2)=2,\ \int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx=4$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава I

1. г) $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{6\pi}{5}$; $\frac{\pi}{2}$. **2.** г) 225°; 270°; −105°. **3.** в) 4; г) 3. **4.** в) Нет; да; да. **5.** в) Нет; г) да. **6.** в) Нет; г) да. **7.** г) $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{8}{15}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{15}{8}$. **8.** г) −1. **9.** в) 1. **10.** б) $-\frac{24}{25}$, $\frac{161}{289}$; $\frac{84}{85}$; $-\frac{77}{85}$. **11.** в) $\operatorname{tg}\alpha$. **12.** б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; $-\cos\frac{\pi}{18}$; $\cos\frac{\pi}{5}$, $-\operatorname{ctg} 0{,}1\pi$. **13.** г) 1. **14.** в) Нет; г) да. **15.** г) $\frac{4}{\sqrt{17}}$; $-\frac{1}{\sqrt{17}}$; −4. **16.** в) 0,7833; 0,6216; 1,2602; 0,7936. **17.** б) 22°6″; 27°30′7″; 63°35′54″; 84°47′52″. **18.** в) 0,1 м; г) 9π м. **19.** в) 0,05 м^2. **20.** б) 1. **21.** в) 3; г) $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **22.** в) $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$. **27.** г) −2. **30.** в) IV; IV; II. **31.** г) Плюс. **36.** в) $D(y)=\mathbf{R}$, $E(y)=[-2;\ 0]$. **37.** г) $D(y)=\mathbf{R}$, $E(y)=[-1{,}5;\ 1{,}5]$. **38.** г) $(0;\ -1)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 0\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **39.** в) $(0;\ 3{,}5)$. **41.** в) $\frac{1}{x_0}+1$, $\frac{1}{a+2}+1$. **42.** в) Нет. **43.** в) $(-\infty;\ -4)\cup(-4;\ 2)\cup(2;\ \infty)$. **44.** в) Числовая прямая, кроме чисел πn, $n\in\mathbf{Z}$. **45.** в) $D(y)=E(y)=(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ \infty)$. **46.** г) $D(y)=[-4;\ 3]$, $E(y)=(-1;\ 4]$. **49.** г) Рис. 1. **50.** в) Выполняем растяжение графика функции $y=\cos x$ вдоль оси ординат ($k=0{,}5$), а затем перенос на вектор $(0;\ -1)$, рис. 2. **52.** г) $S_1(x)=x^2$, $D(S_1)=\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$; $S_2(x)=a^2-x^2$, $D(S_2)=\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. **53.** в) $[-2;\ 1{,}5)\cup(1{,}5;\ \infty)$. **54.** г) $D(y)=\mathbf{R}$, $E(y)=[1;\ 1{,}5]$. **64.** г) 3π. **65.** в) π. **67.** г) $\frac{4\pi}{3}$. **68.** в) г) Нет. **69.** г) Нечетная. **70.** в) Ни четная, ни нечетная. **72.** г) Четная. **73.** г) 2π. **77.** г) Возрастает на $[-4;\ -2]$, $[0;\ 2]$, $[4;\ 6]$; убывает на $[-6;\ -4]$, $[-2;\ 0]$, $[2;\ 4]$; $x_{max}=-2$, $x_{max}=2$, $x_{min}=-4$, $x_{min}=0$, $x_{min}=4$, $y(-2)=y(2)=3$, $y(0)=0$, $y(-4)=y(4)=-2$. **82.** г) Возрастает на $[3;\ \infty)$; убывает на $(-\infty;\ 3]$; $x_{min}=3$, $y(3)=0$. **83.** в) Возрастает на $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ \infty)$; точек экстремума нет. **84.** г) Возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, убывает на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $x_{max}=\frac{\pi}{2}+2\pi n$,

Рис. 1

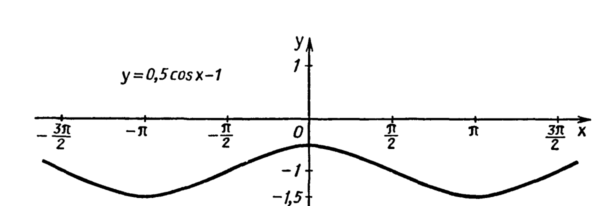


Рис. 2

$y\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=-1$, $x_{\min}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $y\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=-2$, $n\in Z$. **85.** г) Возрастает на $[-\pi+2\pi n;\ 2\pi n]$, убывает на $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$; $x_{\max}=2\pi n$, $y(2\pi n)=0$, $x_{\min}=\pi+2\pi n$, $y(\pi+2\pi n)=-2$; $n\in Z$. **86.** в) Первое больше. **87.** г) $\sin(-1{,}2)$, $\sin 0{,}8$, $\sin 1{,}2$. **88.** г) Убывает на $(-\infty;\ -1]$, $[0;\ 1]$, возрастает на $[-1;\ 0]$, $[1;\ \infty)$, $x_{\max}=0$, $y(0)=0$, $x_{\min}=\pm 1$, $y(-1)=y(1)=-1$. **89.** в) Возрастает на $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$, убывает на $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right]$, $x_{\max}=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $y\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=1$, $x_{\min}=\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $y\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)=-1$, $n\in Z$. **90.** в) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{10}$, $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{15}$, $\operatorname{ctg}\frac{12\pi}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$. **91.** в), г) Указание. Воспользуйтесь свойствами функций $y=x^6$ и $y=x^5$. **92.** б) Указание. Пусть $-b\leqslant x_1<x_2\leqslant -a$, тогда $a\leqslant -x_2<-x_1\leqslant b$ и $f(-x_2)>f(-x_1)$, так как f убывает на $[a;\ b]$, следовательно, $f(x_2)<f(x_1)$. **93.** в) 1) $D(f)=[-6;\ 6]$, $E(f)=[-2;\ 2]$; 2) функция нечетная; 3) $(-4;\ 0)$, $(0;\ 0)$, $(4;\ 0)$ — точки пересечения с осью Ox, $(0;\ 0)$ — точка пересечения с осью Oy; 4) $f(x)>0$ на $(-4;\ 0)$, $(4;\ 6]$, $f(x)<0$ на $[-6;\ -4)$, $(0;\ 4)$; 5) f возрастает на $[-6;\ -2]$, $[2;\ 6]$, убывает на $[-2;\ 2]$; 6) $x_{\min}=2$, $f(2)=-2$, $x_{\max}=-2$, $f(-2)=2$. **96.** г) 1) $D(f)=E(f)=R$; 2) $(1;\ 0)$, $(0;\ -1)$ — точки пересечения с осями координат; 3) $f(x)<0$ на $(-\infty;\ 1)$, $f(x)>0$ на $(1;\ \infty)$; 4) f возрастает на R. **97.** в) 1) $D(f)=[-1;\ \infty)$, $E(f)=[0;\ \infty)$; 2) $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$ — точки пересечения с осями; 3) $f(x)>0$ на $(-1;\ \infty)$; 4) f возрастает на $[-1;\ \infty)$. **98.** в) 1) $D(f)=E(f)=R$; 2) функция нечетная; 3) $(0;\ 0)$ — точка пересечения с осями; 4) $f(x)<0$ на $(-\infty,\ 0)$, $f(x)>0$ на $(0;\ \infty)$; 5) f возрастает на R; г) 1) $D(y)=[2;\ \infty)$, $E(f)=[-2;\ \infty)$; 2) $(6;\ 0)$ — точка пересечения с осью Ox; 3) $f(x)<0$ на $[2;\ 6)$, $f(x)>0$ на $(6;\ \infty)$; 4) f возрастает на $[2;\ \infty)$. **99.** в) 1) $D(f)=R$, $E(f)=\left(-\infty;\ \frac{1}{4}\right]$; 2) функция четная; 3) $(0;\ 0)$, $(-1;\ 0)$, $(1;\ 0)$ — точки пересечения с осями; 4) $f(x)<0$ на $(-\infty;\ -1)$, $(1;\ \infty)$, $f(x)>0$ на $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$; 5) f возрастает на $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right]$, $[0;\ 0{,}5]$, f убывает на $[-0{,}5;\ 0]$, $[0{,}5;\ \infty)$; $x_{\max}=\pm 0{,}5$, $y(-0{,}5)=y(0{,}5)=0{,}25$, $x_{\min}=0$, $y(0)=0$. **100.** г) $-\cos\frac{\pi}{7}$, $-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{9}$. **101.** в) $D(f)=\left(\frac{\pi n}{3};\ \frac{\pi(n+1)}{3}\right)$, $n\in Z$, $E(f)=R$. **102.** г) $f(x)>0$ при

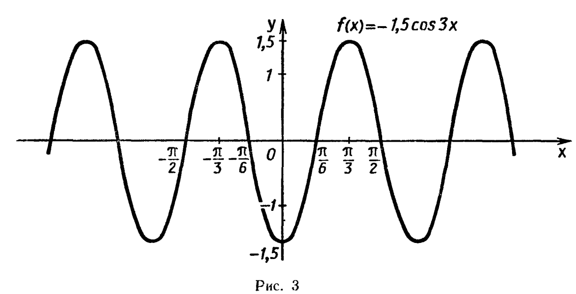


Рис. 3

$\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $f(x)<0$ при $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi(n+1)}{2}$, $f(x)=0$ при $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **103.** г) Возрастает на $\left[-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right]$, убывает на $\left[\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right]$, $x_{max}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $x_{min}=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **104.** в) **График функции изображен на рисунке 3. 105.** в) **График функции изображен на рисунке 4. 106.** г) $A=0{,}5$, $T=4$, $\omega=\frac{\pi}{2}$, $x(t_1)=\frac{1}{4}$. **110.** в) R, кроме чисел $2\pi n$, $n\in Z$. **111.** в) $[0;\ \sqrt{2}]$; г) $(0;\ 2]$. **113.** в) **График функции изображен на рисунке 5. 114.** в) $A=12$, $T=1{,}2$, $I(t)=12\sin\frac{5\pi t}{3}$. **115.** г) $2\frac{2}{3}$. **118.** в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$.

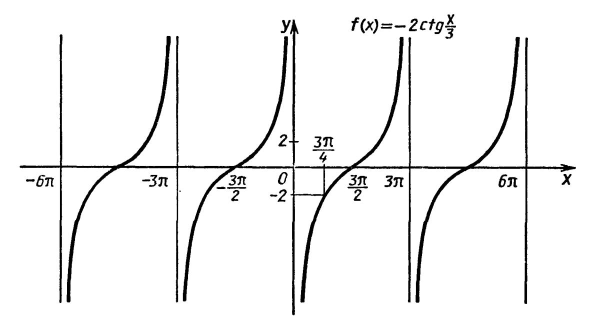


Рис. 4

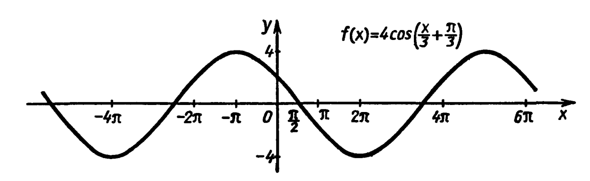


Рис. 5

120. г) $\frac{3\pi}{4}$. **121.** г) $-\frac{\pi}{4}$. **122.** в) $\frac{5\pi}{6}$; г) 0. **124.** в) Нет; г) да. **125.** б) Нет. **126.** г) $-\frac{\pi}{3}$. **127.** в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{12}$ **128.** в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$ **129.** в) Первое меньше. **130.** в) 0,8948; 0,5010. **131.** г) $-\frac{3\pi}{2}$. **132.** б) Введем обозначения $\alpha=\arccos x_1$, $\beta=\arccos x_2$. Предположим, что $\alpha\leqslant\beta$. Так как α и β принадлежат промежутку $[0;\ \pi]$, где косинус убывает, получим $\cos\alpha\geqslant\cos\beta$, т. е. $x_1\geqslant x_2$, что противоречит условию. **133.** б) Указание. Используйте прием, описанный в решении упражнения 132 (б). **136.** в) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$. **138.** г) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. **139.** г) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **141.** в) $\frac{\pi}{6}+\pi n$. **142.** в) $(-1)^n\cdot\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $n\in Z$. **143.** в) $\pm\arccos 0{,}3+2\pi n$, $n\in Z$. **145.** г) $-\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $n\in Z$. **146.** г) $\frac{2\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$. **147.** г) $(-1)^n\frac{3\pi}{4}+$ $+\frac{3\pi}{5}+3\pi n$, $n\in Z$. **148.** в) $\left(\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{6}+\pi n;\ 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+4\pi n;\ 1\right)$, $n\in Z$. **149.** г) $-\frac{2\pi}{3}$, 0, $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{8}$ **151.** в) $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$ **152.** в) $\left(-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right)$ **153.** г) $\left(-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}\right)$ **154.** г) $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **155.** в) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$. **156.** г) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **159.** в) $(4\pi n;\ \pi+4\pi n)$, $n\in Z$. **160.** г) $\left(\frac{17\pi}{24}+2\pi n;\ \frac{25\pi}{24}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **161.** г) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **162.** г) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\arcsin\frac{2}{5}+\frac{\pi n}{2};\ -\frac{1}{4}\arcsin\frac{2}{5}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$. **163.** в) $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$. **164.** г) $(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **165.** г) $2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi n$, $n\in Z$. **166.** г) $\pi+2\pi n$, $n\in Z$. **167.** в) $x_1+\pi n$, $x_2+\pi n$, $x_1=-\operatorname{arctg}2\approx-1{,}1071$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\approx0{,}4636$, $n\in Z$. **168.** г) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **169.** в) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}3{,}5+\pi n$, $n\in Z$. **171.** г) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. **172.** в) $(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **173.** в) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **174.** в) $\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$; k, $n\in Z$. **175.** г) $\left(\frac{\pi}{2}-\pi n;\ \pi n\right)$, $n\in Z$. **176.** в) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$.

Глава II

177. б) 3) 1,2881; 4) $\pi h(2R+h)$. **178.** г) 0,205. **179.** г) $\Delta x=0{,}125$, $\Delta f=0{,}1$.

180. г) $\frac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$. **181.** в) 65 км/ч. **182.** г) На 4 в отрицательном направлении, $v_{ср}=-2$. **184.** в) 1,5, острый. **185.** в) $6(2x+\Delta x)\Delta x$. **186.** г) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=$ $=\frac{-2x_0-\Delta x}{((x_0+\Delta x)^2+1)(x_0^2+1)}$. **187.** в) $v_{ср}=\frac{g}{2}(2t_0+\Delta t)$. **188.** б) Минус, плюс, минус, плюс. **191.** б) 2,5; 2,1; 2,01. **192.** г) -2, -4. **193.** г) 5, -2. **194.** в) $-\frac{1}{4}$, -1

195. г) $y=4x-4$. **196.** в) 2; г) 5. **197.** в) Непрерывна в точках x_1, x_2, не является непрерывной в точке x_3. **200.** в) 5, 4. **201.** в) 6. **202.** г) 0,25. **204.** $h=0{,}04$ дм.

206. $h\approx 0{,}01$ дм. **208.** г) $3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **209.** г) $-8x^3+9x^2+2$. **210.** в) $\frac{34}{(5x+8)^2}$.

211. в) $7x^6-20x^4+2$; г) $x-9x^{-4}$. **212.** в) 1,5; 4. **213.** в) 4; -1. **214.** г) $(-\infty;\ -2)$, $(2;\ \infty)$. **215.** в) $\frac{3x^2(2x^6-4x^3+5)}{(1-x^3)^2}$. **216.** в) -1. **217.** г) $(-\infty;\ 3)$, $(3;\ \infty)$.

218. г) Например, $3x^3-\frac{1}{2}x$. **219.** а) Нет. **220.** г) $f(x)=3x+\frac{\pi}{4}$, $g(x)=\cos x$.

221. в) $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^7$. **222.** в) $[-0{,}5;\ 0{,}5]$. **223.** г) $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$, $n\in Z$

224. г) $-\frac{30}{(6x-1)^6}$. **225.** г) $65(5x-2)^{12}+24(4x+7)^{-7}$ **226.** в) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$. **227.** а) $3-2x^2$; в) $(3-2x)^2$. **228.** б) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$, $[0;\ 1)\cup(1;\ \infty)$; в) $\sqrt{\cos x}$, $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$. **229.** б) $f(x)=x^2$, $D(f)=[0;\ \infty)$; г) $f(x)=$ $=-\sqrt{x-1}$. **230.** г) $-15x^2(3-x^3)^4+\frac{1}{\sqrt{2x-7}}$. **232.** г) $2\cos x-1{,}5\sin x$.

233. в) $\frac{1}{2\cos^2 x}$. **234.** г) 0; -1. **235.** г) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. **237.** б) $-\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$.

239. г) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi n$, $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi n;\ \frac{\pi}{12}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **240.** в) Например, $f(x)=-\sin x$.

241. г) Да, да. **242.** в) R; г) $(-\infty;\ 2)$, $(2;\ \infty)$. **243.** в) 0,7. Указание. Проверьте, что $f(0{,}8)<0$, $f(0{,}6)>0$. **244.** г) $(-\infty;\ 1)$, $(2;\ 6)$. **245.** в) $(-\infty;\ -4)$, $[-2;\ -1)$, $[2;\ \infty)$. **246.** г) $(-\infty;\ -3]\cup(-1;\ 1)\cup[3;\ \infty)$. **247.** г) $m>0$. **248.** г) $(-2;\ -1)$, $(1;\ 2)$. **249.** в) $(-2;\ 0)$, $(0;\ 3)$; г) $(-\infty;\ -5]$, $[2;\ \infty)$. **250.** в) $(-\infty;\ -4]\cup[0;\ 4]$.

253. в) 3. **254.** г) 0. **255.** г) $y=3x+1$, $y=12x-17$. **256.** в) $y=2$, $y=1+\frac{\pi}{2}-x$.

257. в) $(-1;\ -1)$, $(0;\ 2)$, $(1;\ -1)$. **258.** г) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n-1\right)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \sqrt{2}\left(2\pi n+1-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $n\in Z$. **259.** а) arctg 3 в точке (0; 0), $\pi-$arctg 6 в точках $(-\sqrt{3};\ 0)$ и $(\sqrt{3};\ 0)$; г) $\frac{\pi}{4}$ в точках $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 0\right)$, $\frac{3\pi}{4}$ в точках $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 0\right)$, $n\in Z$. **260.** а) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{5\pi}{6}$. **261.** в) 24,52, $-0{,}16$; г) 40,52, 9,86.

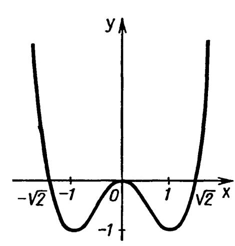



Рис. 6

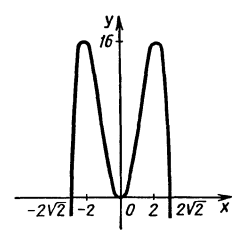


Рис. 7

263. г) 2,0004 **264.** г) 0,9302. **265.** в) 0,526. **266.** в) 0,1247. **267.** а) $(-t^2+4t+5)$ м/с; в) 5 с **268.** 35 м/с; 22 м/с^2 **269.** $(6t-4)$ рад/с, 20 рад/с. **270.** а) 2,8 рад/с. **271.** $12t$ см/с, а) $\frac{1}{12}$ c; б) $\frac{1}{6}$ c. **272.** а) 6 с; б) 18 м/с. **274.** $22m$. **275.** а) 0,04 H; б) 0,0025 Дж. **276.** а) 65 г/см; б) 125 г/см. **277.** $0<t<2\frac{2}{3}$

278. $\frac{8t^2-9t+21}{\sqrt{4t^2-6t+21}}$ при $t>0$. **280.** г) Возрастает на $(-\infty, -3]$, $[3; \infty)$; убывает на $[-3; 3]$. **281.** в) Возрастает на $(-\infty; -2]$, $[2; \infty)$, убывает на $[-2; 2]$. **283.** г) График функции изображен на рисунке 6. **284.** в) График функции изображен на рисунке 7. **286.** г) $f'(x)=-3x^2+6x=3x(2-x)$, $f'(x)<0$ при всех x из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(2; \infty)$, следовательно, f убывает на $[-2; 0]$ и $[2; 3]$, $f(-2)>0$, $f(0)<0$, $f(2)>0$, $f(3)<0$, по теореме о корне уравнение имеет единственное решение на каждом из промежутков $[-2; 0]$, $[2; 3]$. **287.** б) x_2, x_4, x_5, x_6, x_7

288. в) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) ± 2. **290.** в) $x_{max}=-1$, $x_{min}=0$; г) $x_{min}=\pm 1$, $x_{max}=0$. **291.** а) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(x)\neq 0$ ни при каких x; $f'(x)$ не существует при $x=0$, но эта точка не является внутренней для промежутка $[0; \infty)$. **292.** в) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. **293.** в) ± 3; г) 0; ± 2.

295. г) График функции изображен на рисунке 8. **297.** г) График функции изображен на рисунке 9. **298.** г) Возрастает на $(-\infty; -1]$, $[5; \infty)$, убывает на $[-1; 5]$. **300.** в) $D(f)=E(f)=\mathbf{R}$; f — нечетная; $f(x)=0$ при $x=0$, $x=\pm\sqrt{\frac{20}{3}}$; $f(x)>0$, если $x\in\left(-\sqrt{\frac{20}{3}}, 0\right)$, $x\in\left(\sqrt{\frac{20}{3}}; \infty\right)$; $f(x)<0$,

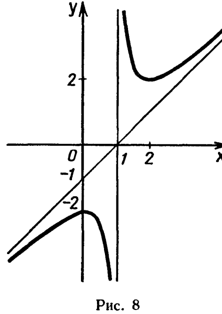


Рис. 8

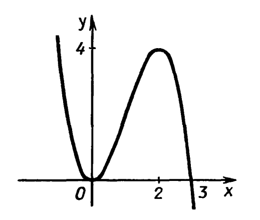


Рис. 9

Рис. 10

если $x\in\left(-\infty;\ -\sqrt{\frac{20}{3}}\right)$, $x\in\left(0;\ \sqrt{\frac{20}{3}}\right)$; f возрастает на $(-\infty;\ -2]$, $[2;\ \infty)$; f убывает на $[-2;\ 2]$; $x_{\max}=-2$, $f(-2)=4\frac{4}{15}$, $x_{\min}=2$, $f(2)=-4\frac{4}{15}$;

г) $D(f)=E(f)=R$; f — нечетная функция; $f(x)=0$, если $x=0$, $x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$; $f(x)>0$, если $x\in\left(-\infty;\ -\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $x\in\left(0;\ \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$; $f(x)<0$, если $x\in\left(-\sqrt{\frac{5}{3}};\ 0\right)$, $x\in\left(\sqrt{\frac{5}{3}};\ \infty\right)$; f возрастает на $[-1;\ 1]$, убывает на $(-\infty;\ -1]$, $[1;\ \infty)$; $x_{\min}=-1$, $f(-1)=-2$; $x_{\max}=1$, $f(1)=2$. **301.** в), г) Графики функций изображены на рисунках 10, 11. **302.** в), г) Графики функций изображены на рисунках 12, 13. **304.** в) 2; г) 3. **305.** в) $\max\limits_{[0;\ 2]} f(x)=f(2)=56$, $\min\limits_{[0;\ 2]} f(x)=f(1)=-2$; $\max\limits_{[2;\ 3]} f(x)=f(3)=594$, $\min\limits_{[2;\ 3]} f(x)=f(2)=56$; г) $\max\limits_{[-3;\ -2]} f(x)=f(-2)=2$, $\min\limits_{[-3;\ -2]} f(x)=f(-3)=1{,}5$; $\min\limits_{[1;\ 5]} f(x)=f(1)=\frac{1}{2}$, $\max\limits_{[1;\ 5]} f(x)=f(5)=\frac{5}{6}$. **307.** 6 с. 72 м/с. **308.** $\min\limits_{[-2;\ 5]} f(x)=f(-2)=9$, $\max\limits_{[-2;\ 5]} f(x)=$

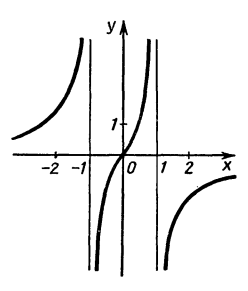


Рис. 11

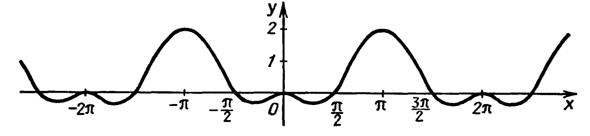


Рис. 12

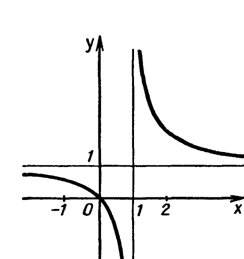


Рис. 13

$=f(2)=25$. **309.** 10 с. **310.** в) $\max\limits_{\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\min\limits_{\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2$; г) $\max\limits_{[-5;\ -2,5]} f(x)=f(-3)=-4$, $\min\limits_{[-5;\ -2,5]} f(x)=f(-5)=-5\frac{1}{3}$. **311.** $24=12+12$. **312.** $4=2+2$. **313.** 12 м, 12 м. **314.** $54=12+24+18$. **315.** $16=4\cdot 4$. **316.** 8 см, 8 см. **317.** Высота — 1,5 дм, сторона основания — 3 дм. Решение. Пусть x — сторона основания бака ($x>0$). Выразим его высоту через объем и сторону основания. $13,5=x^2\cdot h$, $h=\frac{13,5}{x^2}$. Найдем поверхность бака $S=x^2+4x\cdot\frac{13,5}{x^2}=$ $=x^2+\frac{54}{x}$. Найдем наименьшее значение функции $S(x)=x^2+\frac{54}{x}$ на промежутке $(0;\ \infty)$. $S'(x)=2x-\frac{54}{x^2}$, $x=3$ — критическая точка. Функция убывает на $(0;\ 3]$, возрастает на $[3;\ \infty)$. Следовательно, $\min\limits_{(0;\ \infty)} S(x)=S(3)=27$. **318.** 30 см, 20 см. **319.** $20\sqrt{2}$ см, $20\sqrt{2}$ см. **320.** В точку, удаленную на 3 км от населенного пункта и на 12 км от точки шоссе, ближайшей к буровой вышке. **321.** К точке отрезка AB, удаленной от B на 1 км. **322.** $-0,5$. **324.** Квадрат.

Глава III

327. г) Нет. **329.** в) Например, $-4x$. **331.** в) Нет. **332.** в) Например, x. **334.** г) $f(x)=3-2\sin x$. **336.** в) $x+\frac{1}{3x^3}+C$. **337.** г) $-\cos x-2$. **339.** в) $-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$. **341.** г) $x(t)=-\cos t$. **343.** г) $-\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+C$. **344.** в) $-\frac{4}{3(3x-1)}+C$. **345.** г) $-\frac{1}{2x^2}-2x^5+3x+4,5$. **346.** в) $\frac{2}{3}\operatorname{tg}(3x+1)-$ $-3\cos(4-x)+x^2+C$ **347.** г) $-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-4\frac{1}{3}$. **348.** $x(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2-t$. **349.** $x(t)=4\sin\frac{t}{2}+2$. **350.** $x(t)=t^4+2t^2+2t+7$. **351.** г) $x(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2+t-1\frac{2}{3}$

352. в) -2; второй. **353.** в) 2; г) $\frac{1}{2}$. **354.** в) $10\frac{2}{3}$; г) $\pi+1$. **355.** в) $1\frac{1}{3}$, г) $\frac{1}{4}$. **356.** в) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **357.** г) 1. **358.** в) 0,9. **360.** г) $10\frac{2}{3}$. **361.** г) $5\frac{1}{3}$. **362.** г) 4. **363.** в) $\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}$. **364.** г) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **365.** г) 4,5. **366.** г) $\frac{1}{12}$. **367.** $5\frac{1}{3}$.

368. 4,5. **369.** а) Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, $G(x)$ — первообразная для

$g(x)$. Тогда $F(x)+G(x)$ — первообразная для $f(x)+g(x)$. Поэтому $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = (F(x)+G(x))\Big|_a^b = F(b)+G(b)-F(a)-G(a) = F(b)-F(a)+G(b)-G(a) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$. **370.** г) $\frac{16\pi}{15}$. **371.** г) $\frac{\pi}{6}$. **372.** а) $\frac{\pi H^2}{3}(3R-H)$; б) $\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2)$. **373.** 0,16 Дж. **374.** 0,16 Дж. **375.** $\gamma q\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$. Указание. $F(x)=-\frac{\gamma q}{x^2}$, где $\gamma>0$ — некоторая постоянная. Поэтому $A=\int_a^b\left(-\frac{\gamma q}{x^2}\right)dx=\frac{\gamma q}{x}\Big|_a^b$. **376.** $\frac{(a+2b)h^2}{6}\rho g$ (в упражнениях 376—378 ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения). Указание. Сила давления жидкости на погруженную в нее пластинку (вертикальную) вычисляется по формуле $P=\rho g\int_{h_1}^{h_2} S(x)\,dx$, где $S(x)$ — площадь пластинки, глубина погружения h меняется от h_1 до h_2. **377.** $\frac{\pi r^2h^2\rho g}{2}$. **378.** $\frac{4}{3}\pi R^4\rho g$. **379.** $\frac{\rho S\omega^2 l^3}{6}=4\,160\,000\,\pi^2$ эрг. Решение. Масса части стержня, отмеченная на рисунке 14, равна $\rho S\Delta x$; пренебрегаем диаметром стержня (считаем отмеченную часть отрезком длиной Δx), тогда с точностью до величин порядка Δx линейная скорость каждой точки этой части равна ωx. Обозначим через $E(x)$ кинетическую энергию части $[0;\,x]$ стержня. Приращение кинетической энергии за счет отрезка $[x;\,x+\Delta x]$ приблизительно равно $\frac{mv^2}{2}$, т. е. $\frac{\rho S\omega^2x^2\Delta x}{2}$, поэтому $E'(x)=\frac{\rho S\omega^2x^2}{2}$; $E(0)=0$, и, следовательно, искомая энергия есть $E(l)=\int_0^l E'(x)\,dx=\int_0^l \frac{\rho S\omega^2x^2dx}{2}=\rho S\omega^2\int_0^l \frac{x^2}{2}\,dx=\frac{\rho S\omega^2 l^3}{6}$. **380.** Точка высоты конуса, находящаяся на расстоянии $\frac{3}{4}$ высоты, считая от его вершины.

Рис. 14

Глава IV

384. в) $-\frac{3}{2}$ **386.** в) ± 2. **387.** г) $\pm\sqrt{17}$. **388.** г) -1. **391.** в) 6. **392.** г) -5. **393.** г) 2. **394.** в) $\frac{5}{4}$. **395.** г) 1,44. **396.** г) 2,22. **397.** в) 1,29. **399.** в), г) Первое меньше. **400.** в), г) Первое больше. **401.** в) Первое больше. **402.** в) $a^3b\sqrt[4]{6b^2}$ **403.** г) $\sqrt[3]{4a^3b^3}$. **404.** в) $a\geqslant 0$; г) $a\geqslant 0$. **405.** а) $a=0$; б) $a\leqslant 0$; г) при всех a.

406. г) $\frac{7+2\sqrt{6}}{5}$. 407. г) $\frac{\sqrt[5]{5^4}}{3}$. 408. г) $5\sqrt[5]{4}$. 409. г) $\frac{1}{2}\sqrt[12]{320}$. 410. г) 6^6. 411. г) $(-\infty; \sqrt[3]{5}]$. 412. г) $[0; 81]$. 414. в) 0. 415. г) 2. 416. в) $\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{49}}{6}$. 417. в) ± 6. 418. г) 8. 419. г) 0, -1. 420. в) -10; 2. 421. в) (16; 81). 422. г) 0; 0,4. 424. г) -12. 425. г) ± 2. 426. в) (16; 4), $\left(36; 1\frac{7}{9}\right)$. 427. г) (27; 1), $(-1; -27)$. 428. г) $\sqrt{6^{-3}}$. 429. в) $b^{-\frac{7}{13}}$. 430. в) 32. 431. в) $\frac{128}{27}$. 432. г) $x^{\frac{1}{2}}(3^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}})$. 433. г) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+1)$. 434. г) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$. 435. г) $x-1$. 436. г) Первое меньше. 437. г) 10. 438. г) $-\frac{1}{\sqrt{2m}}$. 440. г) $\sqrt[21]{b^7c^5}$. 441. в) Равны. 442. г) Нет. 443. в) $(0; \infty)$. 444. в) $a=\pm 1$ г) $a=0$. 446. г) $(-2; \infty)$. 447. г) Первое меньше. 448. г) 9. 450. г) $|x^n-y^n|$. 451. в) 169,8; 173,8. 452. $10^{\sqrt{5}}\approx 172{,}4$. 453. г) $y=(3-\sqrt{7})^x$ — убывает, $y=\left(\frac{1}{3-\sqrt{7}}\right)^x$ — возрастает. 454. г) $[1; \infty)$. 455. г) -1; $-1\frac{2}{3}$. 457. в) 0; г) 1. Указание. С помощью эскизов графиков «угадываем» абсциссу точки пересечения $x=1$, остается доказать, что других точек пересечения нет. Для этого воспользуемся свойствами соответствующих показательной и линейной функций. При $x>1$ функция $y=4^x$ принимает значения, большие 4, а функция $y=5-x$ — меньшие 4. (При $x<1$ функции прииимают соответственно значения — меньшие и большие 4.) Следовательно, других точек пересечения графики не имеют. 458. г) -1. 461. в) 4; г) $\frac{1}{4}$. 462. в) 4; г) -3; 1. 463. в) 3; г) -1. 464. в) 1; г) 1; 0. 465. в) $(-2; -3)$; г) $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$. 466. в) $[2; \infty)$; г) $(-\infty; 2)$. 467. в) $(-\infty; 0{,}5)$; г) $(-1; \infty)$. 468. в) -2; г) 2. 469. в) -1; г) 2. 470. в) 2; г) 2. 471. в) (1; 2), (2; 1); г) (2; 1,5). 472. в) $[-3; -1]$; г) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$, $(4; \infty)$. 473. в) $(-2; \infty)$; г) $(-\infty; 1)$. 474. в) $(2; \infty)$; г) $[-1; \infty)$. 475. в) $(-\infty; 0]$; г) $[1; \infty)$. 484. г) $\frac{1}{49}$. 485. г) 8. 486. г) 3. 487. г) $\log_5 5$, $\log_5 \frac{1}{25}$, $\log_5 1$, $\log_5 125$. 489. г) $\frac{1}{2}$. 490. г) $\frac{1}{25}$. 491. г) $2\log_3 b-3-7\log_3 a$. 493. г) $\frac{7}{4}\lg c-7-\frac{2}{3}\lg a-8\lg b$. 494. г) $1+a+b$. 496. в) -2. 497. в) $\frac{m^5n^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{1}{4}}}$. 498. в) Решение. Рассмотрим разность между выражениями, содержащимися в левой и правой частях неравенства, сравним ее с нулем: $\log_3 7+\frac{1}{\log_7 3}-2=\frac{\log_3^2 7-2\log_3 7+1}{\log_7 3}=\frac{(1-\log_3 7)^2}{\log_7 3}>0$. г) Решение. Преобразуем левую часть равенства: $3^{\log_2 5}=(5^{\log_5 3})^{\log_2 5}=5^{\log_5 3\cdot\log_2 5}=5^{\frac{\log_2 3}{\log_2 5}\cdot\log_2 5}=5^{\log_2 3}$. 499. г) $(-\infty; -4)\cup(4; \infty)$. 500. в) $\left(-\frac{2}{3}; 2\frac{1}{2}\right)$. 502. в), г) Первое меньше. 503. в), г) Первое больше. 505. в) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\right.$

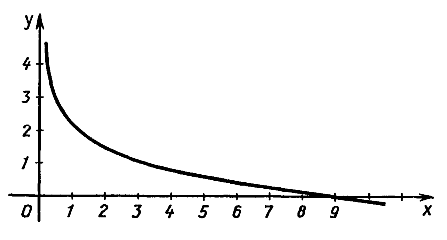


Рис. 15

$\frac{\pi}{2}+2\pi n\Big)$, $n \in Z$. **506.** в), г) 0. **507.** г) *График функции изображен на рисунке 15.* **508.** г) π^{-2}. **509.** в) 5. **510.** г) Нет. **511.** в) 0; —1. **512.** в) $\log_2 10$. **513.** г) 100. **514.** в) —2,35. **515.** в) $\frac{2}{3}-\log_3 2$. **516.** в) (0,7; ∞). **517.** в) (8; ∞); г) (12; ∞). **518.** в) 5; г) 0. **519.** в) 2; г) 0; 8. **520.** в) 25; $\frac{1}{5}$; г) 27, $\frac{1}{3}$. **521.** в) (32; 2), (2; 32); г) (1; 1). **522.** в) 4; г) 100, 10^8. **523.** в) 9; г) $\frac{1}{2}$. **524.** в) 2; г) 2. **526.** в) (1; 3); г) $(-4;\ -3)\cup(4;\ 5)$. **527.** в) $(0;\ 0{,}001)\cup(10;\ \infty)$; г) $\left[\frac{1}{27};\ 27\right]$. **528.** в) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $(\sqrt[3]{0{,}1};\ 10)$. **529.** в) $\left(\frac{1}{27};\ 3\right)$; г) (9; 7). **530.** в) (2; 6); г) (9; 6). **531.** в) $g(x)=\frac{1-x}{2}$, $D(g)=E(g)=\mathbf{R}$. **532.** г) $g(x)=x^2-1$, $D(g)=[0;\ \infty)$, $E(g)=[-1;\ \infty)$. **533.** г) График изображен на рисунке 16. **535.** в) $g(x)=x^4, x\leqslant 0$; г) $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$. **538.** в) $-\frac{1}{2}e^x$. **539.** г) $2xe^x+x^2e^x$. **540.** в) $y=1+x$; г) $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x-1)\ln 2$. **541.** г) $\frac{1}{2}e^x+x+C$. **542.** в) $\frac{7}{4\ln 2}\approx$ $\approx 2{,}5247$. **543.** г) $-2^{-x}\left(\ln 2\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{3}+\frac{1}{3\sin^2\frac{x}{3}}\right)$. **544.** в) $\frac{3^x(2^x\ln 1{,}5+5^x\ln 0{,}6)}{(2^x+5^x)^2}$.

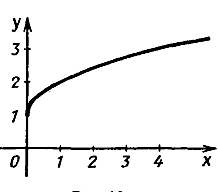


Рис. 16

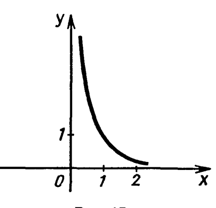


Рис. 17

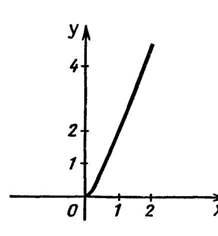


Рис. 18

545. в) Возрастает на $(-\infty; 1]$, убывает на $[1; \infty)$; $x_{max}=1$, $f(1)=\frac{1}{e}$. **546.** г) $\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{2{,}3^{x+1}}{\ln 2{,}3}+C$. **547.** г) $\frac{1}{2}e^2-e+\frac{1}{2}$. **548.** в) $\frac{3}{\ln 2}-2\approx 2{,}3$. **549.** в) $\frac{5}{1+5x}$. **550.** г) $\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$. **551.** в) $\ln|x+2|+C$. **552.** г) $y=\frac{x-2}{\ln 2}$. **553.** г) $\frac{1}{3}\ln 10\approx 0{,}7675$. **554.** в) $\frac{x(2\ln 5x-1)}{\ln^2 5x}$. **555.** в) Убывает на $\left(0; \frac{1}{2}\right]$, возрастает на $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$; $x_{min}=\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\ln 2$. **556.** в) Возрастает на $(0; e^2]$, убывает на $[e^2; \infty)$, $x_{max}=e^2$, $f(e^2)=\frac{2}{e}$. **557.** в) $\frac{1}{2}\ln 8\approx 1{,}0397$. **558.** г) $-\sqrt{5}x^{-\sqrt{5}-1}$. График изображен на рисунке 17. **559.** г) $2\ln 3\cdot(2x)^{\ln 3-1}$, график изображен на рисунке 18. **560.** г) 2,63. **561.** г) 2,0125. **562.** г) 27, $\frac{1}{8}$. **563.** г) $\frac{x^{e+1}}{e+1}+C$. **564.** г) 844. **565.** г) $\ln 1\frac{2}{3}\approx 0{,}5108$. **567.** в) Нет; г) $x_0=0$. **572.** г) Например, $y=2\cos\frac{x}{2}$. **573.** в) $x''=-9x$. **575.** в) $\frac{t\ln 2}{\ln m-\ln n}$. **576.** 9 мин. **577.** $\frac{1}{\lg 2}$ ч $\approx 3{,}322$ ч; 0,6394. **578.** $\frac{10\lg 2}{\lg 1{,}6}$ мин $\approx 14{,}75$ мин. **580.** $500e^{-5}$ м/мин $\approx 3{,}37$ м/мин.

Глава V

1. а) Да; б), в) нет; г) да. **3.** а) 52 305; 52 335; 52 365; 52 395; 52 320; 52 350; 52 380; б) 52 344. **5.** 35. **6.** Указание. Пусть дробь $\frac{ab}{a+b}$ сократима на число d, d — делитель ab, поэтому существует общий делитель d' либо у чисел a, d, либо у чисел b, d; пусть для определенности d' — делитель a и d, тогда $a+b$ делится на d', следовательно, b делится на d', значит, дробь $\frac{a}{b}$ сократима на d'. **13.** в) $1\frac{8}{90}$ **14.** а) Пусть $\sqrt{5}=\frac{p}{q}$ $p\in Z$, $q\in N$, $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, $\frac{p}{q}>0$, поэтому можно считать, что p и q — натуральные числа. Тогда $5=\frac{p^2}{q^2}$, т. е. $p^2=5q^2$, откуда следует, что p^2, следовательно, и p делятся на 5, т. е. $p=5k$. Подставляя $p=5k$ в равенство $p^2=5q^2$, получим $25k^2=5q^2$, $q^2=5k^2$. Из последнего равенства видно, что q делится на 5. Получили противоречие со сделанным предположением: оказалось, что дробь $\frac{p}{q}$ сократима на 5; в) если $\sqrt{5}+1=r$ (где r рационально), тогда $\sqrt{5}=r-1$ рационально, что противоречит иррациональности $\sqrt{5}$. **19.** а) Равны; в) первое меньше; г) первое больше. **31.** 87 или 69.

32. 0. **34.** $b_1=0{,}2$; $q=5$. **36.** 5. **37.** 12,5; 7,5; 4,5; 1,5 или 2; 4; 8; 12. **38.** $q=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $S=3$. **39.** $b_1=6$; $q=0{,}5$. **43.** г) $\frac{x-3}{y}$. **44.** г) 2. **45.** г) 3. **47.** в) 1; г) 1. **48.** в) $x\sqrt{x}-\sqrt{x}$. **49.** г) $-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$. **50.** б) $ab^{-\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}})$; г) $-\frac{c^{2,5}}{c^2+2}$. **51.** в) $c^{\frac{1}{2}}$; г) 3. **52.** б) $|\sin\beta+\cos\beta|$; г) $\sin\beta$. **53.** в) 1. **58.** б) $\frac{1-m}{1+m}$; г) $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos 2\alpha=-\frac{7}{9}$. **59.** а) 0. **60.** а) Меньше 0. **61.** 1. **62.** г) Первое больше. **63.** в) Первое больше. **64.** а) $4\frac{3}{4}$. **65.** б) 0,34. **66.** в) -3; г) 1. **67.** б) $4+4\log_{0,2}b-\frac{9}{7}\log_{0,2}c$. **68.** б) 14. **69.** г) 365,06446. **70.** $\lg 2\approx0{,}3010$. **71.** $2-A$. **73.** б) $S=3\sqrt[3]{\frac{16v^2}{3}}$. **77.** в) $(-\infty;\ -\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5};\ -2)\cup(2;\ \sqrt{5})\cup(\sqrt{5};\ \infty)$. **80.** в) $f(x)>0$ на $\left(-\infty;\ \frac{8}{3}\right)$ и $(5;\ \infty)$, $f(x)<0$ на $\left(\frac{8}{3};\ 5\right)$. **81.** г) Убывает на $(-\infty;\ 1)$ и на $(1;\ \infty)$.
85. г) См. рис. 19. **86.** а) См. рис. 20. **87.** в), г) Да. **88.** в) Пусть $f(x)=x^5+3x-5$, $f(x)$ непрерывна, при этом $f(1)=-1<0$, $f(2)=33>0$. **91.** $a=3$, $b=-5$. **92.** в) $a>0$, $b<0$, $c>0$, $D<0$; г) $a<0$, $b<0$, $c=0$, $D>0$; д) $a<0$, $b<0$, $c<0$, $D<0$. **93.** а) Могут (квадратичная вида $y=ax^2+b$ и линейная вида $y=b$). **94.** в) $y=\frac{x^2}{x^4-1}+\frac{x^3-x}{x^4-1}$. **96.** в) Все числа, кроме чисел вида $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$. **97.** в) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in Z$. **98.** г) $[-1;\ 1]$. **99.** г) $(-\infty;\ -2]\cup[2;\ \infty)$. **100.** в) $y>0$ на $\left(-\frac{5\pi}{2}+4\pi n;\ \frac{\pi}{2}+4\pi n\right)$, $y'<0$ на $\left(\frac{\pi}{2}+4\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+4\pi n\right)$, $n\in Z$. **101.** в) Нечетная; г) четная. **102.** г) π. **103.** в) Убывает на $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+\pi n\right]$, возрастает на $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $x_{\min}=\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $x_{\max}=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **104.** г) $\min\limits_{D(y)} y=1$, $\max\limits_{D(y)} y$ не существует. **105.** б) Указание. $y=|\sin x|$. **108.** Да.

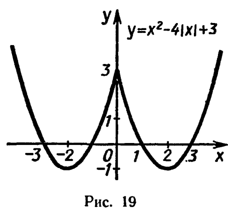


Рис. 19

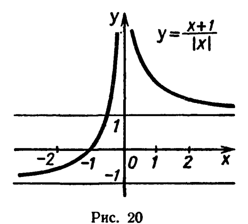


Рис. 20

109. в) $\operatorname{tg} 2<-1<\operatorname{ctg} 2$. **111.** в) 0; г) 0. **112.** в) $(-\infty; 0)\cup[1; 4]$. **113.** в) $(-\infty; \infty)$; г) $(2\pi n; \pi+2\pi n)$, $n\in \mathbf{Z}$ **114.** в) $\left(\frac{2}{3}; 2\right)\cup(2; \infty)$. **115.** г) $(0; \infty)$. **116.** в) $[1; \infty)$.
117. в) $y>0$ на $(-\infty; \log_3 2)$, $y<0$ на $(\log_3 2; \infty)$. **118.** в) $y>0$ на $[0; \infty)$. **119.** в) Ни четная, ни нечетная. **120.** в) Четная. **123.** а) Указание. $y=x-1$ при $x>1$, $D(y)=(1; \infty)$. **124.** г) $\min\limits_{[-1;\,8]} y=y(1)=0$, $\max\limits_{[-1;\,8]} y=y(-1)=4$.
125. г) ± 3. **126.** г) $(0; 3)$. **128.** а) 0; $\frac{\sqrt{65}-1}{8}$. **133.** г) $\left[\frac{14}{11}; \infty\right)$. **134.** в) $[1; 13]$; г) $[-1; 5]$. **135.** г) $-3{,}5$ и $[3; \infty)$. **137.** в) -6; г) 2; $-\frac{34}{99}$. **138.** а) 1; 2; $-7\frac{1}{3}$; в) $\frac{5}{2}$; 4; г) 0; -1; 3. **139.** а) $\frac{5}{3}$; в) $\frac{37}{9}$; г) $\frac{215}{27}$. **140.** в) $-\frac{4}{3}$; г) -4; $\frac{4}{3}$.
141. в) -1; г) 1. **142.** в) $(-\infty; \infty)$; г) $(1; 13)$. **143.** г) $(-\infty; -4)\cup(6; \infty)$. **144.** в) $(1; 3)\cup(3; 5)$; г) $(3; 4)$. **146.** в) 2; г) -4; 4. **147.** в) 2; г) 63. **148.** в) 4; г) $-\frac{1}{3}$; 0. **149.** в) -8; 8; г) -1; -3. **150.** в) $(-\infty; -\sqrt{17}]\cup[\sqrt{17}; \infty)$; г) $(9; \infty)$.
151. в) $[2; 3]$; г) $[-3; 5]$. **152.** а) $-\pi+2\pi n$; $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}+\pi n$ (или $\operatorname{arctg} 0{,}5+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ — другая форма ответа); г) $\operatorname{arctg} 0{,}5+\pi n$; $n\in\mathbf{Z}$. **153.** в) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.
154. в) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $2\pi n$, $2\cdot(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **155.** в) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; г) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **156.** в) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ **157.** в) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) πn; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **158.** а) $-\frac{5}{4}$; б) 0; в) $-2\sqrt{3}-2$; г) $\varnothing$. **159.** в) $\left(\frac{4\pi}{15}+\frac{4\pi n}{5}; \frac{8\pi}{15}+\frac{4\pi n}{5}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\left[-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right]$, $n\in\mathbf{Z}$. **160.** в) $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\left(-\pi+2\pi n; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **161.** а) $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$; в) $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **162.** а) $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; в) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; 2\pi+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$ $n\in\mathbf{Z}$. **163.** в) 1; 5; г) 3; 9. **164.** в) 2; г) 1. **165.** в) 3; г) 0; $\frac{1}{4}$. **166.** в) $\pm\log_{\frac{5}{2}} 2$; г) 0; $\frac{1}{2}$.
167. б) $\pm\arccos(\sqrt{2}-1)+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) -1. **168.** в) $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right)$; г) $(-\infty; -4)\cup(3; \infty)$. **169.** в) $(1; 3)$; г) $(-\infty; -1]\cup[0; \infty)$. **170.** б) $(-5; 3)\cup(4; \infty)$. **171.** в) 6; г) 1001; $1+\sqrt[3]{10}$. **172.** в) 10; г) 3. **173.** г) 64. **174.** в) 100; $\frac{1}{100}$; г) 3; 9. **175.** а) $(-1)^n\times\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\arcsin\frac{1}{14}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **176.** а) $\left(-3; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; 4\right)$;

г) $\left(\sqrt{7}-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$. **177.** а) (0; 6); г) (1; 2]∪[3; 4). **178.** в) (2; ∞); г) $\left(\frac{5}{3}; \infty\right)$
179. в) (0; 0,1]∪[100; ∞); г) (−∞, 0]∪[$\log_6 5$; 1). **180.** в) $\left(\frac{31}{7}; \frac{9}{7}\right)$; г) ∅
181. в) (0,4; 0,8); г) (2; 3); (3; 2). **182.** в) (0,5; 4); г) (7; 3); (−7; −3). **183.** в) (1; 2); (2; 1); г) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$ **185.** в) $\left[-3; \frac{4}{3}\right)$; г) (−3,5; 0). **186.** в) (25; 49); г) (9; 16); (16; 9). **187.** в) (16; 4); г) (16; 4); (−4; −16). **188.** в) (81; 16); г) (−1, −8); (−8; −1). **189.** а) $\left(\frac{\pi}{4}-(-1)^k\frac{\pi}{12}+\pi n-\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{12}+\pi n+\frac{\pi k}{2}\right)$ $k, n\in\mathbf{Z}$; б) $\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\ \frac{n}{2}+\frac{1}{6}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; в) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k; -\frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k\right)$, $k, n\in\mathbf{Z}$; г) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}+2\pi n\right)$ $k, n\in\mathbf{Z}$.
190. б) $\left(\pi n; \frac{5\pi}{2}-\pi n\right)$; $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{5\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. в) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n+\pi k; \frac{\pi}{6}+\pi n-\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n+\pi k; -\frac{\pi}{6}+\pi n-\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n, -\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{6}-2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}-2\pi n\right)$ $n\in\mathbf{Z}$.
191. а) (2; 1); б) (5; 4); в) (5; 1); г) (3; 0). **192.** а) (1; 3); б) (3; 2); в) (2; 0); г) (2; 6). **193.** а) (2; 1); ($\log_3 7$; $\log_7 9$); б) (4; 1). **194.** а) (100; 10); (0,1; 0,01); б) (4; 4); в) (1 000 000; 0,1); г) $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. **195.** а) (27; 4); $\left(\frac{1}{81}; -3\right)$; б) (2; −1); в) (125; 4); (625; 3); г) (3; 2). **196.** а) (4; 2); б) (25; 36); в) (1; 1); (4; 2); г) (512; 1). **197.** 75 км/ч. **198.** 4 км/ч. **199.** 55 км/ч. **200.** 18 км/ч, 24 км/ч. **201.** 10 с. **202.** 240 м³. **203.** 6 и 12 дней. **204.** 20. **205.** 25%. **206.** 160 г, 20%. **207.** 60 км/ч. **208.** 21 м/с, 147 м. **209.** 6 км/ч, 4 км/ч. **210.** 20; 30. **211.** 20 и 30 дней. **212.** 12 г, 48 г, 1,5 г/см³. **213.** 3 кг, 80%. **214.** 4 м/с, 3 м/с. **215.** 32. **216.** 8 и 3; 28 и 27. **218.** в) 3; г) 3. **219.** г) $\frac{(x^3-2)\sin x+3x^2\cos x}{(2-x^3)^2}$.
220. г) $\frac{\cos x-2}{(1-2\cos x)^2}$. **221.** г) $\frac{e^x+e^{-x}-x(e^x-e^{-x})\ln x}{x(e^x+e^{-x})^2}$. **222.** г) $\frac{1}{x\ln 10}-\frac{6}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$ **223.** г) $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. **225.** в) $f'(x_2)=f'(x_4)$; г) $f'(x_3)<0<f'(x_5)$. **228.** б) 25,375; 9,84. **229.** в) 1,005; г) $2+\frac{1}{1500}\approx 2{,}00067$. **230.** в) Возрастает на [1; ∞), убывает на (−∞; 1], $x_{\min}=1$; г) возрастает на (−∞; 4) и (4; ∞). **231.** в) Возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, убывает на $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $x_{\max}=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $x_{\max}=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $x_{\min}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) возрастает на (−∞; ∞).
232. а), б) См. рис. 21. **234.** а), б) См. рис. 22. **235.** в) $\max\limits_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} f=f\left(\frac{1}{2}\right)=$



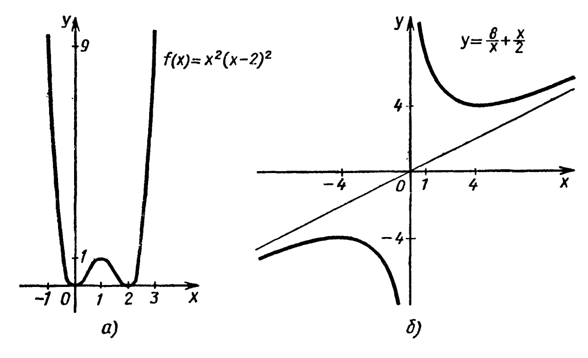


Рис. 21

$=4\frac{1}{4}$ $\min\limits_{\left[\frac{1}{2},1\right]} f=f(1)=3$; г) $\max\limits_{[-\pi;\pi]} f=f(-\pi)=\pi$; $\min\limits_{[-\pi;\pi]} f=f(\pi)=-\pi$.

236. а) $10+0$; б) $5+5$. **237.** 10 см, 10 см. **238.** 72 см^2. **239.** $\frac{23}{410}$ ч. **240.** 2,4 м. **241.** $4\sqrt{2}$ м. **242.** $h=2r$. **243.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **245.** $R=1{,}5$ ч. **246.** $4R$ **247.** $H=R\sqrt{3}$. **248.** $b=\frac{40}{\sqrt{3}}$ см, $h=40\sqrt{\frac{2}{3}}$ см. **249.** $R=\frac{p}{\pi+4}$; $H=\frac{p}{\pi+4}$. **250.** На расстоя-

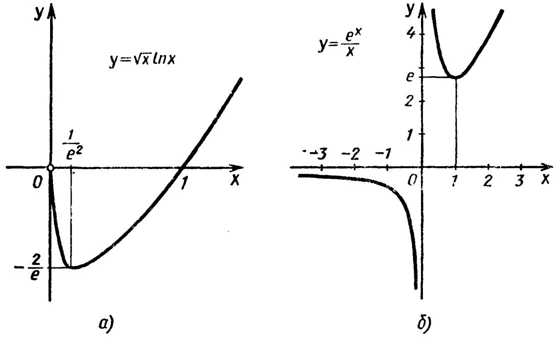


Рис. 22

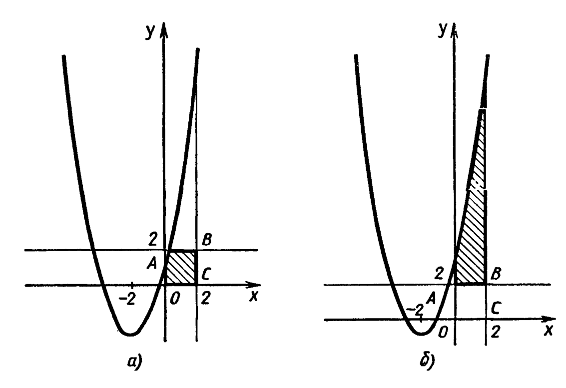


Рис. 23

нии 1,5 R от точки касания. **251.** 60°. **252.** $M(1;\ 1)$. **253.** $\sqrt[3]{4V}$. **254.** а) $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$, б) $(6;\ \infty)$. **255.** 3,5 рад/с. **256.** $0{,}04\pi$ см²/с. **257.** 8 км/ч. **258.** $|v|=1{,}5$ м/с. **259.** $\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}$ м/с, $\frac{100}{\sqrt{(25-4t^2)^3}}$ м/с². **260.** 1) 360 г; $5x$ г/см; 2) 0; 60 г/см. **261.** 3π рад/с. **262.** а) 85 м; б) 4 с, 90 м. **263.** а) $M(-1;\ -1{,}5)$; б) $M(1;\ -1{,}5)$. **264.** $-\frac{1}{3}$; 0. **266.** $f'(x)=5x^4+2>0$ для любого x. **268.** в) $2x+3\ln|x-1|+C$; г) $\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}3x+C$. **269.** в) $-\frac{1}{3x^3}-2\frac{23}{24}$; г) $-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}$. **270.** x^2-3x+4. **271.** $y=x^3-5$. **272.** $-\frac{1}{4}\cos 2t+3$. **273.** в) $\frac{7-2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{12}$; г) 39. **274.** а) 2; -2; б) 0,5; $-0{,}5$. **275.** в) $\frac{4}{3}$; г) 9. **276.** 18 и $\frac{74}{3}$. **277.** $10\frac{2}{3}$. **278.** $\frac{2}{3}$. **279.** 2; 1. **280.** $\frac{8}{3}$.

Решение. Указанная фигура заштрихована на рисунке (рис. 23, *а* соответствует $a<2$, а рис. 23, *б* соответствует $a\geqslant 2$). При $a<2$ площадь этой фигуры меньше площади квадрата $OABC$, равной 4, а при $a\geqslant 2$ $S=\int_0^2(x^2+4x+a)\,dx-S_{OABC}=$ $=\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+ax\right)\Big|_0^2-4=\frac{8}{3}+8+2a-4=2a+\frac{20}{3}$, следовательно, $2a+\frac{20}{3}=12$, откуда $a=\frac{8}{3}$. **281.** $a=\frac{2}{\pi}$, $b=2$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА III. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

ГЛАВА IV. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

ГЛАВА V. ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ